My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Logie

Modes de raisonnements

Exercice 1. Montrer par récurrence que $-1+2-3+4-\cdots+(-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Exercice 2. (Récurrence). Démontrer que $1+2+\cdots+n = \frac{n\ n}{2}$ puis que l'on a $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Conjecturer, puis démontrer une formule fournissant la somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 3. (Télescopage). On propose de calculer de deux manières différentes

$$S_n = (n+1)^2 - n^2 + n^2 - (n-1)^2 + (n-1)^2 - \cdots + k^2 - (k-1)^2 + \cdots + 2^2 - 1^2.$$

a. Montrer que $S_n = (n+1)^2 - 1$ par des simplifications en cascade.

b. En regroupant et en développant les termes deux par deux, montrer que

$$S_n = 2(n + (n-1) + \cdots + (k-1) + \cdots + 1) + n.$$

c. En déduire une formule donnant la somme $1+2+\cdots+n$.

d.* Appliquer cette technique avec des exposants 3 puis 4 au lieu de 2, afin de retrouver la somme des n premiers carrés et la somme des n premiers cubes.

Exercice 4. Démontrer par récurrence que $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. À partir de la formule $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, proposer une autre démonstration, en utilisant le principe de simplification « télescopique » introduit dans l'exercice 19.

Exercice 5. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+1}$ et $u_0 = 1$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b. Montrer que (u_n) est croissante puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

c. Pour tout entier n on pose $v_n = \frac{u_n-2}{u_n}$. Calculer v_0 puis v_1.

d. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison.

e. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

f. Pour tout entier n calculer $\frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \cdots + \frac{2}{u_n}$ en fonction de n.

Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Dresser le tableau de variations de f puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

b. Montrer que pour tout n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

c. Montrer que si $x \geqslant 2$, $f(x) \leqslant x$; puis que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7. Démontrer par récurrence que $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. À partir de la formule $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, proposer une autre démonstration, en utilisant le principe de simplification « télescopique » introduit dans l'exercice 19.

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+1}$ et $u_0=1$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $1\leqslant u_n\leqslant 2$.

b. Montrer que (u_n) est croissante puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

c. Pour tout entier n on pose $v_n=\frac{u_n-2}{u_n}$. Calculer v_0 puis v_1.

d. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison.

e. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

f. Pour tout entier n calculer $\frac{2}{u_0}+\frac{2}{u_1}+\cdots+\frac{2}{u_n}$ en fonction de n.

Exercice 9. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})$.

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$. Dresser le tableau de variations de f puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

b. Montrer que pour tout n non nul, $u_n\geqslant\sqrt{2}$.

c. Montrer que si $x\geqslant 2$, $f(x)\leqslant x$; puis que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10. (Suites récurrentes d'ordre 2).

a. Soit (u_n) définie par $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$, $u_0=1$ et $u_1=2$. Calculer les premiers termes de cette suite, conjecturer une expression de u_n et la démontrer par récurrence.

b. Soit (F_n) la suite de Fibonacci, avec $F_0=0$ et $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

c.* Montrer qu'il existe α et β tels que pour tout n, $F_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. *On pourra déterminer α et β à l'aide de F_0 et F_1 puis effectuer une récurrence.*

d. Une grenouille monte un escalier de n marches en faisant des bons de une ou deux marches. De combien de façons peut-elle arriver en haut ?

Exercice 11 On considère $n\in\mathbb{N}^*$ et on rappelle que $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

a. Montrer par récurrence que $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^n$.

b. Montrer par récurrence que $(n+1)!\geqslant 1!+2!+3!+\cdots+n!$.

c. En déduire que la suite de terme général $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$ converge vers 1.

FIN