Espaces Vectoriels

Partie I : Généralités

1. Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. (*)
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \leq y\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 1\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 = 0\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 2. (**)
On considère les deux ensembles suivants : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. (**)
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n)$ bornée $\}$
2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n)$ monotone $\}$
3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n)$ convergente $\}$
4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n)$ arithmétique $\}$

Exercice 4. (*)
Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5. (**)
On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes. On pose

$$\Delta = \{f - g, (f,g) \in \mathcal{C}^2\}.$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6. (**)
Montrer que l'ensemble des fonctions réelles périodiques est un espace vectoriel.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on note $E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = m\}$. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels E_m est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. (*)

Démontrer que l'ensemble G des polynômes à coefficients réels qui sont divisibles par X^2+1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que l'ensemble F des matrices M carrées d'ordre 3 qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que l'ensemble G des matrices M symétriques d'ordre 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble H des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 10. (**)

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1) Les fonctions continues.
2) Les fonctions bornées.
3) Les fonctions paires.
4) Les fonctions impaires.
5) Les fonctions croissantes.
6) Les fonctions positives.
7) Les fonctions qui vérifient $f(a) = b$.

2. Familles de vecteurs

Exercice 11. (*)

On pose $u = (1,1,1)$ et $v = (1,0,-1)$. Montrer que

$$Vect(u,v) = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta),\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 12. (*)

Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, exhiber une relation linéaire liant ces vecteurs.

1. (x_1, x_2) avec $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$.
2. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$.
3. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$.
4. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 13. (***)

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = e^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 14. (***)

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose :

$$u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n,\ y_i = x_i + u.$$

A quelle condition sur les α_i la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est-elle libre ?

Exercice 15. (***)

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de vecteurs de F. Montrer que pour tout $a\in F\backslash Vect(e_1,\dots,e_p)$, la famille $(e_1+a,\dots,e_p+a)$ est libre.

Exercice 16. (**)

Dans $\mathbb{R}^2$, on donne les vecteurs $u_1=(-1,2)$, $u_2=(1,-1)$ et $u_3=(2,-3)$.

1. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la décomposition du vecteur $u=(1,2)$ en combinaison linéaire de (u_1,u_2,u_3) n'est pas unique. Combien admet-il de décompositions ?
4. Montrer que la famille (u_1,u_2) est aussi génératrice de $\mathbb{R}^2$ mais que la décomposition de tout vecteur en combinaison linéaire de (u_1,u_2) est unique.
5. Montrer que la famille (u_1,u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17. (**)

1. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que les vecteurs $(1,x)$ et $(-x,1)$ soient liés dans $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que les vecteurs $(1,z)$ et $(-z,1)$ soient liés dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 18. (*)

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $u_1=(2,-1,3)$, $u_2=(3,2,1)$ et $u_3=(0,1,1)$.

1. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2.
2. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_3.
3. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_2 et u_3.

Exercice 19. (*)

Déterminer une base pour chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

— $A=\{(x+2y,-y+3x,3y)\mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$,
— $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y+z=0\}$,
— $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x-z=0 \text{ et } y+z=0\}$,

Exercice 20. (**)

On note $F=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AM=MA\}$ avec $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un ous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 21. (***)

1. Montrer que la famille de vecteurs $u_1=(3,-1,1)$ et $u_2=(1,2,3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer un troisième vecteur pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22. (**)

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E=\mathbb{C}^3$, on pose $e_1=(1+i,1-i,i)$, $e_2=(2-i,3i,-1+i)$ et $e_3=(-i,3+2i,1+i)$.

1. Déterminer une équation de $Vect(e_1, e_2)$.
2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 23. (**)

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 2a-b+c & 0 & a-2b \\ a+b & a-b-c & 2a+b \\ a-2b & a+3b & a+b-2c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 5\alpha & 0 & -4\alpha \\ 5\alpha & -5\alpha & 7\alpha \\ -4\alpha & 11\alpha & -3\alpha \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de E, dont on donnera une base.

Exercice 24. (**)

1. Démontrer que les polynômes $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$, $P_3(X) = 1 + X + X^2$ et $P_4(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Démontrer que les polynômes $Q_1(X) = 1 - X$, $Q_2(X) = 1 + X - X^2$, $Q_3(X) = 1 + 2X - X^3$ et $Q_4(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 25. (*)

Démontrer que les suites u, v et w définies par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.