Probas I

Partie I : Généralités

Exercice 1

Pour effectuer un trajet en avion, on a le choix entre 3 compagnies. On choisit au hasard la compagnie. On admet que les probabilités pour chaque compagnie qu'un avion arrive à l'heure sont respectivement 80%, 65% et 75%. Sachant qu'on est arrivé en retard, quelle est la probabilité que l'on ait choisi la première compagnie ?

Exercice 2

Dans un lot de pièces, on sait qu'une pièce sur vingt est défectueuse. À la sortie de la chaîne de fabrication, un test est effectué et la pièce est conservée si le test est positif. On dispose des données suivantes : si la pièce est bonne, son test est positif dans 96% des cas ; si la pièce est défectueuse, son test est négatif dans 98% des cas. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce acceptée soit défectueuse ?

Exercice 3

Dans une association multisport un adhérent peut pratiquer, entre autres, du tennis, du golf ou du squash. Pour un adhérent pris au hasard, on considère les événements T : « il pratique le tennis », G : « il pratique le golf » et S : « il pratique le squash ». On dispose des probabilités suivantes : $P(T) = 60\%$, $P(G) = 20\%$, $P(S) = 40\%$. De plus, on sait qu'un pratiquant de tennis a une probabilité de 50% de faire du squash et 30% de faire du golf ; un pratiquant de golf a une probabilité de 65% de faire du squash. Enfin, 70% des adhérents pratiquent au moins une de ces trois activités.
Déterminer la probabilité qu'un adhérent pratique ces trois activités. *On pourra utiliser la formule du crible.*

Exercice 4

Trois personnes participent à un jeu de grattage. La probabilité de gagner à ce jeu est $p = 1/10$. On note G_i l'événement « la personne numéro i gagne ».

1. Quelle est la probabilité que les trois personnes gagnent ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une des trois personnes gagne ?
3. Sachant que deux personnes ont gagné, quelle est la probabilité que la première personne ait gagné ?

Exercice 5

On dispose d'une urne contenant 2 boules rouges et 2 boules bleues. On effectue 3 tirages selon les modalité suivante : si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne, si c'est une rouge, on ne la remet pas. On note R_i l'événement « on tire une boule rouge au tirage numéro i » et B_i : « on tire une boule bleue au tirage numéro i ».
Calculer la probabilité de tirer 3 fois une boule bleue puis celle de tirer toutes les boules rouges de l'urne.

Exercice 6

On dispose de deux urnes, la première contient 3 boules bleues et 2 rouges et la deuxième contient 1 boule bleue et 3 rouges. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient 1 ou 2 il tire deux boules simultanément dans l'urne 1 et sinon il les tire dans l'urne 2.
On note U_i l'événement « le joueur effectue le tirage dans l'urne i » pour $i \in \{1,2\}$. On note aussi R l'événement « les deux boules tirées sont rouges ».

1. Déterminer $\mathrm{P}_{\mathrm{U}_1}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{U}_2}(\mathrm{R})$.
2. Justifier que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ est un système complet d'événements.
3. Calculer la probabilité de R.
4. On note S l'événement « le dé a donné 6 ». Calculer la probabilité de S sachant qu'on a tiré au moins une boule bleue.

Exercice 7

Dans une usine, pour analyser le fonctionnement d'une machine, on note mois après mois pendant N mois les pannes survenues ($\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$). On constate :

- sur un mois la machine tombe en panne au plus une fois ;
- si pendant un mois, elle n'a pas de panne, la probabilité qu'elle ait une panne le mois suivant est $\frac{1}{4}$;
- Si la machine tombe en panne un mois (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant est $\frac{1}{20}$.

On désigne par A_n l'événement « la machine tombe en panne le n^{e} mois après sa mise en service » et on note p_n sa probabilité. On suppose que $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

1. Calculer p_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{A}_n)$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_{n-1}}}(\mathrm{A}_n)$. Établir une relation entre p_n et p_{n-1}.
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n (pour tout $n \leqslant \mathrm{N}$).
4. Montrer que la suite (p_N) converge et déterminer sa limite.

Exercice 8

Un joueur dispose de deux pièces A et B pour jouer à pile ou face. La probabilité d'obtenir pile est de $\dfrac{1}{3}$ avec la pièce A et de $\dfrac{2}{5}$ avec la pièce B. Au départ, le joueur choisit une pièce au hasard et la lance. Ensuite, pour chacun des lancers, il suit la règle suivante : si un lancer amène pile, il relance la même pièce la fois suivante ; sinon il change de pièce. Le joueur effectue n lancers où $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les événements suivants, pour tout entier k naturel non nul :
A_k : « le joueur joue avec la pièce A au k^{e} lancer »
R_k : « le k^{e} lancer amène pile »

1. Soit k un entier naturel non nul. Déterminer $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_k}(\mathrm{A}_{k+1})$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_k}}(\mathrm{A}_{k+1})$.
2. En déduire l'expression de $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k+1})$ en fonction de $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$.
3. En déduire l'expression de $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ en fonction de k.
4. Soit k un entier naturel non nul. Exprimer $\mathrm{P}(\mathrm{R}_k)$ en fonction de $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$.

Exercice 9

On a 5 dés dont un est truqué, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir 6 avec ce dé est $\dfrac{1}{2}$ tandis que les 4 autres dés sont équilibrés. On prend un dé au hasard et on le lance trois fois. On note S_i l'événement : « on obtient 6 au lancer n^{o} i » pour $i \in [\![1,3]\!]$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois 6 ?
2. On obtient trois fois 6. Quelle est alors la probabilité qu'on ait utilisé le dé truqué ?
3. Même question si on n'a obtenu aucun 6.

Exercice 10

Dans une classe E on note A l'ensemble des élèves qui parlent anglais, B l'ensemble des élèves qui parlent allemand et C l'ensemble de ceux qui parlent espagnol. Comment note-t-on l'ensemble des élèves :

1. qui parlent au moins une de ces langues étrangères ?
2. qui parlent ces trois langues ?
3. qui ne parlent aucune de ces langues ?
4. qui parlent exactement deux de ces langues ?

Exercice 11

On lance quatre dés différents à six faces. On note le nombre sur chacun des dés. On considère que tous les résultats ont la même probabilité.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des nombres pairs ?
3. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun 6 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois 1 ?

Exercice 12

On lance une pièce de monnaie cinq fois consécutivement. Le résultat de l'expérience est la donnée des résultats (pile ou face) de chaque lancer. On considère que les résultats sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des piles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une alternance de piles et de faces ?

Exercice 13

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On tire quatre boules successivement sans remise. Un tirage est la donnée des quatre boules tirées dans l'ordre. On considère que tous les tirages sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité de tirer les boules numérotées de 1 à 4 ?
3. Quelle est la probabilité de ne pas tirer de boule de numéro supérieur ou égal à 6 ?
4. Quelle est la probabilité de tirer les boules de numéros rangés dans l'ordre croissant ?

Exercice 14

On lance trois dés numérotés (dé n°1, n°2 et n°3) à six faces. On considère que les dés sont bien équilibrés et donc que tous les résultats sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4, un 2 et un 1 lors d'un tirage ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir le même chiffre sur les trois dés ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre exactement deux fois ?

Exercice 15 (Le jeu de loto)

On considère un jeu de loto avec 49 boules. Un tirage est la donnée de 6 boules. Pour jouer, on coche 6 numéros sur une grille.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Étant donné une grille cochée, quelle est la probabilité que le joueur ait exactement 5 bons numéros ? Même question pour 4 et 3 bons numéros ?
3. Combien y a-t-il de tirages avec 6 numéros consécutifs ?

Exercice 16

On dispose d'un jeu de 52 cartes contenant 13 cœurs. On tire trois cartes.

1. Quelle est le nombre de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ? (Il y a quatre as dans le jeu).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux cœurs ?

Exercice 17

On considère une course de 10 participants. Un podium est la donnée des 3 premiers concurrents dans l'ordre.

1. Combien y a-t-il de podiums différents ?
2. Combien y a-t-il de podiums sans les concurrents 8, 9 et 10 ?
3. Combien y a-t-il de podiums avec les concurrents 1 et 2 ?

Exercice 18

Un réprésentant de commerce doit visiter 6 villes dans la semaine. Combien de façons a-t-il d'organiser son parcours ?

Exercice 19

On considère une urne contenant 10 boules bleues numérotées de 1 à 10, 6 boules rouges numérotées aussi et 4 boules blanches également numérotées. On tire 5 boules (simultanément).

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage d'une seule couleur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir la couleur rouge et la couleur blanche seulement ?

Exercice 20

Quelle est la probabilité que dans une classe de 12 élèves deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ? (On considère que les 365 jours de l'année sont équiprobables, on oublie le 29 février).

Exercice 21 ★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, lors de n lancers consécutifs d'une pièce de monnaie, on note a_n le nombre de résultats différents tels qu'on ait jamais deux piles consécutives. On souhaite calculer a_n en fonction de n.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3.
2. Pour $n \geqslant 2$, exprimer le nombre de tirages sans piles consécutives qui se terminent par une face en fonction de a_{n-1} et a_{n-2} (peut-être pas les deux).
3. Même question pour le nombre de tirages sans piles consécutifs qui se terminent par une pile.
4. Exprimer a_n en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}.
5. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.