Probas I
Partie II : VAR

Exercice 1

On considère un questionnaire à choix multiples composé de 10 questions avec trois propositions à chaque question, une seule proposition étant la bonne. Un candidat obtient 2 points par bonne réponse et aucun point par mauvaise réponse. Supposons qu'un candidat répond au hasard à chacune des 10 questions. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données par le candidat et X la variable aléatoire égale à la note obtenue.
Quelle est la loi de Y ? Quelle est l'espérance de X à savoir la note moyenne que peut espérer ce candidat ?

Exercice 2

On considère l'expérience suivante : on lance 5 pièces de monnaie équilibrées.

1. Soit X le nombre de piles obtenues. Donner la loi de X et son espérance.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 piles ?

Exercice 3

On considère qu'un jour donné de printemps, il y a une probabilité de pluie de $1/4$ et que les pluies de différentes journées sont indépendantes. Soit X le nombre de jours de pluie au mois d'avril. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 4

Un sac contient 5 jetons, indiscernables au toucher, numérotés $1, 1, 2, 2, 3$. On extrait, simultanément et au hasard, 2 jetons et on désigne par X la somme des numéros inscrits.
Donner la loi de X.

Exercice 5

1. Pour tout réel $x \neq 1$ on pose : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

   Rappeler l'expression de $f_n(x)$ en fonction de n et x, et en déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ en fonction de n et x $(x \neq 1)$.
   Dans une urne, on place :
   - $2^0 = 1$ boule numérotée 0,
   - 2^1 boules numérotées 1,
   - 2^2 boules numérotées 2,
   - ...,
   - 2^n boules numérotées n.

   On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro figurant sur la boule tirée.
2. Quel est le nombre total de boules présentes dans l'urne ?
3. Déterminer la loi de X.
4. Calculer E(X).
5. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ calculer $P(X \leqslant k)$.

Exercice 6

On dispose de deux urnes : l'une contient trois boules numérotées 1, 2 et 3 et l'autre contient une boule numérotée 1 et une autre 2. On tire une boule dans chaque urne et on définit la variable X comme la somme des numéros tirés.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer E(X) puis V(X).

Exercice 7

Une urne contient $n+1$ boules : n blanches et une noire. On tire successivement toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang de sortie de la boule noire.
Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 8

On sait que la population française est constituée de 10% de gauchers. On considère donc que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à $1/10$ indépendamment des autres individus.

1. Dans une entreprise de couture on recrute 8 employés. Soit X le nombre d'employés gauchers recrutés.
   a) Quelle est la loi de X ? son espérance ? son écart type ?
   b) Calculer la probabilité pour que le groupe contienne : exactement un gaucher ; au moins un gaucher ; exactement 3 gauchers.
2. L'atelier dans lequel les employés vont travailler est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité que chacun des 8 membres du personnel trouvent une paire de ciseaux lui convenant ?
3. Soit Y le nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à leur convenance. Dresser un tableau donnant Y en fonction du nombre de gauchers recrutés. En déduire la loi de probabilité de Y ainsi que son espérance.

Exercice 9

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules une à une, sans remise et au hasard, jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des boules de la même couleur. X est le nombre de tirages nécessaires. On définit les événements B_i : « on tire une boule blanche au tirage numéro i » et N_i : « on tire une boule noire au tirage numéro i ».
Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 10

On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

- méthode I : on analyse le sang de chacune des N personnes ;
- méthode II : on regroupe les N individus en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus d'un même groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on analyse alors le sang des n individus du groupe.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs ?
2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculez en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $\mathrm{N} = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.

Exercice 11

On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire égale au maximum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer soigneusement $X(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$. *(Calculer* $\mathrm{Card}(X \leqslant k)$*).*
   En déduire la loi de X.

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont l'ensemble des valeurs est $[\![0,n]\!]$.
Démontrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$.

Exercice 14

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne avec une autre boule de la même couleur. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages. On définit les événements B_i (resp. R_i) : « on tire une boule blanche (resp. rouge) au tirage numéro i ».

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. a) Montrer que $[X_n = k] = ([X_{n-1} = k] \cap R_n) \cup ([X_{n-1} = k-1] \cap B_n)$.
   b) Montrer, par récurrence sur n, que X_n suit la loi uniforme sur l'ensemble $[\![0,n]\!]$.

Exercice 15

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrête à l'obtention d'une boule blanche. On décide de procéder à un maximum de n tirages. On désigne par X_n la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche si on en obtient une, et à 0 si aucune boule blanche n'est obtenue après n tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
2. Exprimer son espérance $E(X_n)$ sous la forme d'une somme (qu'on ne demande pas de calculer dans cette question). Calculer la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers l'infini.
3. ★ En utilisant la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$ et sa dérivée, calculer $E(X_n)$. *(Voir calcul dans l'exercice 5).* $\left[\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(\frac{3n}{5}+1\right)\right)\right]$

Exercice 16

On considère un jeu de 52 cartes contenant 4 as. On tire simultanément 10 cartes au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'as tirés.
Déterminer la loi de X. *On donnera* $X(\Omega)$ *puis on déterminera* $\mathrm{Card}(\Omega)$ *et* $\mathrm{Card}(X = k)$.

Exercice 17

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que le dernier numéro tiré est supérieur ou égal au numéro tiré au tirage précédent. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de X.
2. Déterminer $P(X \geqslant 2)$ et $P(X \geqslant 3)$.
3. Plus généralement, pour k valeur possible de X, calculer $P(X \geqslant k)$ *(remarquer que $X \geqslant k$ signifie que les $k-1$ premiers numéros tirés sont rangés par ordre strictement décroissant et dénombrer le nombre de cas possbiles...)*.
4. En déduire la loi de X.
5. Calculer l'espérance de X puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18

On lance deux dés équilibrés indépendants et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre du premier dé et X_2 la variable aléatoire égale au nombre du second. Puis on note Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1, X_2)$ le plus grand des deux numéros.
On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les événements $[X_1 \leqslant x]$ et $[X_2 \leqslant x]$ sont indépendants.

1. Donner la loi de X_1 et de X_2.
2. Déterminer la fonction de répartition F de cette loi.
3. Soit G la fonction de répartition de Y.
   a) Montrer que pour tout réel x et tout résultat ω,
   $$Y(\omega) \leqslant x \iff X_1(\omega) \leqslant x \text{ et } X_2(\omega) \leqslant x.$$
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x)^2$.
   c) En déduire la loi de Y.

Un matheux veux demander une fille au mariage :

Le M : Bonjour, je suis sùr à 50% qu'on va se marier dans 2 minutes

La F : Ah bon, et pourqoui alors

le M : Parceque je suis d'accord

FIN
FIN