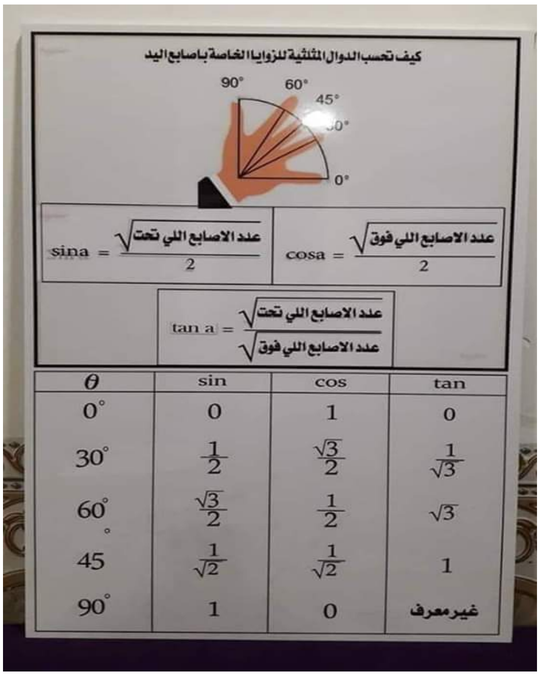
Dérivation II
Inégalité de Taylor-Lagrange



Exercice 1 : A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

a) $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{1}{2}x^2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

d) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$

Exercice 2 :

Calculer la dérivée n-ième de :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

Calculer la dérivée n-ième de :

1. $f : x \mapsto (x^2+1)e^x$
2. $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 + 4x - 1$. Écrire ses développements de Taylor avec reste intégral : 1) à l'ordre 3 entre 0 et 2 2) à l'ordre 5 entre -1 et x.

Exercice 4 :

Écrire le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ en fonction des polynômes $Q_k(x) = (x+2)^k$ pour $0 \leq k \leq 4$.

Exercice 5 :

Écrire les développements de Taylor avec reste intégral des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)$ à l'ordre 4 entre 0 et x.
2. $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 entre 0 et x.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ à l'ordre 3 entre 2 et x.
4. $f(x) = \exp(2x)$ à l'ordre 3 entre 0 et x.
5. $f(x) = \exp(2x)$ à l'ordre 5 entre 1 et x.
6. $f(x) = \ln(1+3x)$ à l'ordre 3 entre 0 et x.

Exercice 6 :

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

Exercice 7 :

Montrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\left|e^{-b} - e^{-a} + (b-a)e^{-a}\right| \leq \frac{|a-b|^2}{2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Classiques Concours

Classique 1

On pose pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$.
2. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et 1 à l'ordre n.
   Qu'en déduit-on sur la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$?
3. Autre méthode : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
   (a) Montrer que la suite (I_n) converge vers 0, puis calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n-1} + I_n$.
   (b) Exprimer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ en fonction des intégrales (I_k). Qu'en déduit-on sur la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$?

Classique 2

Le but de cet exercice est de déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

1. Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{ex^2}{2}$.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}| \leq \frac{e}{2n}$. Conclure.

Classique 1

Pour tout $x > 0$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que la série converge. On note $g(x)$ la somme de la série. Que vaut $g(1)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \geq 0$, on a $|e^{-u} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!}| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. a) Montrer alors que pour tout $x \geq 1$, $|\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)}| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{x+n+1}$.
   b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du = g(x)$.
   bonus : montrer que le résultat précédent reste vrai si $0 < x < 1$.

Classique 3

le grand classique des sujets EML

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

1. a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la monotonie de f.
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f, en précisant $f(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout $u \in [-1,1]$, $|e^{-u} - 1 + u| \leq \frac{3u^2}{2}$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   (b) En déduire que :$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in [-1,1]$, $\forall t \in [0,1]$, $|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}| \leq h^2 \frac{3t^2}{2}e^{-xt}$
   Montrer alors : $|f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt| \leq \frac{3h^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
   (c) En déduire que f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$.

Classique 4 `Ecricome S 2016`

On note pour tout $n \geq 1$, $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Rappeler un DL d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.
b) Montrer alors que $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge.