Séries Numériques

1. Etude de convergence et calcul de sommes

Exercice 1

Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{3n^4-2n^3+7}{6+2^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-\sqrt{n}}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt[n]{2}-1)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\cos\left(\frac{1}{2n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\sin\pi\sqrt{n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2n+1}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{4^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)\times 2^n}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2\times 2^n}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 3 **Séries de Mengoli**

On considère la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n\geqslant 1)$.

1. Donner la nature de cette série.
2. Montrer que $u_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.
3. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

Exercice 4

Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{k+1}{k!}$.
2. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\cos\frac{1}{2k^2}$.
3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2+1}\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi}{2k}$.
5. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{k+\cos k}{e^k+\sin k}$.
6. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{\ln(2k)}\right)^k$.
7. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left((e^k+1)^{1/k^2}-1\right)$.
8. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(\ln(3^k+2)-\ln(3^k)\right)$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt[n]{2}-1)$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1-n}{2n}\right)^n$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2. Les Classiques

Exercice 5 *Comparaison série/intégrale.*

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$,
$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t \ln t} \leqslant \frac{1}{k \ln k} \quad \text{et} \quad \forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k \ln k} \leqslant \frac{1}{t \ln t}.$$
2. En déduire que pour tout entier $k \geqslant 3$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leqslant \frac{1}{k \ln k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k} \leqslant \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$.
4. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{t \ln t}$ (directement). En déduire les valeurs des intégrales précédentes.
5. Conclure quant à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Exercice 6 *Comparaison série/intégrale.* — On s'intéresse à la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{k \ln k}$, pour $k \geq 2$.

1. Montrer : $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

2. En déduire : $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$.

3. Conclure.

4. * Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Exercice 7 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0. Pour tout entier n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Que peut-on conclure quant à la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3. *Application* : Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$?

Exercice 8. (**) - Série de Bertrand

Soient deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

1. *Cas* $\alpha > 1$ – Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha (\ln(k))^\beta}$ est convergente.
2. *Cas* $\alpha < 1$ – Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha (\ln(k))^\beta}$ est divergente.

Exercice 9. (***) - Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n converge, et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_k - u_{k+1}) + A_n u_n.$$

2. En déduire que la série de terme général $a_n u_n$ converge.

Exercice 10. (***) - Critère de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. Démontrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p\ (\ell - \varepsilon)^n \leq u_n \leq (\ell + \varepsilon)^n$.
2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
3. On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série dans le cas où $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Exercice 11. (***) - Critère de d'Alembert

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \lambda.$$

1. On suppose que $\lambda < 1$.
   (a) Soit $a \in]\lambda, 1[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq a u_n$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n converge.
2. On suppose que $\lambda > 1$. Montrer de même que la série de terme général u_n diverge.
3. Application. Montrer que la série de terme général $\frac{n!}{n^n}$ est convergente.

Exercice 14.

Exercice 12. (***) - Sommation des équivalents

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels positifs équivalentes.

1. On suppose que la série de terme général u_n diverge. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ quand } n \to \infty.$$

2. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \text{ quand } n \to \infty.$$

3. Extraits de Concours

Exercice 13. `inspiré d'edhec S 2006`

On définit la suite u par $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge.
2. a) Déterminer un équivalent de $\ln(\frac{u_n}{u_{n+1}})$.

   b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(\frac{u_n}{u_{n+1}})$ et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\frac{u_k}{u_{k+1}})$.
3. En déduire la limite de $\ln(u_n)$ puis celle de u_n quand $n \to +\infty$.
4. a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.

   b) En déduire que $\frac{4^n}{n} = o(\binom{2n}{n})$.

Exercice 14 `esc S 2007`

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 \dfrac{1}{(x^3+1)^n} dx$.

1. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On notera ℓ sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n2^n} + (J_n - J_{n+1})$.
3. Le but de cette question est de montrer que $\ell = 0$.
   (a) Montrer que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\frac{1}{3n2^n}$ sont convergentes.
   (b) On suppose dans cette question que $\ell \neq 0$. Donner un équivalent de $\frac{J_n}{3n}$.
   Quel est la nature de la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$?
   (c) Conclure.

Exercice 15 *bonus* `inspiré d'Edhec S 2013`

Le but de cet exercice est de montrer sur deux exemples que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge, alors la série de terme général $u_n = \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge également et de plus : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

1. Exemple 1 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n(n+1)$.
   (a) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
   (b) Pour tout entier n non nul, déterminer u_n en fonction de n.
   (c) Etablir la convergence de la série de terme général u_n, donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.
2. Exemple 2 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n!$.
   (a) Ecrire une fonction scilab dont l'en-tête est `function y=fact(n)` et qui renvoie $n!$.
   En déduire un script scilab qui calcule et affiche u_n lorsque n est un entier entré par l'utilisateur.
   (b) Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.
   (d) En déduire la convergence de la série de terme général u_n, puis l'inégalité demandée.