Probabilités 3 : Probabilités Discrètes

Exercice 1

On considère une urne contenant une boule noire et deux boules blanches. On tire indéfiniment successivement avec remise une boule de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au rang du tirage où on obtient la boule noire pour la première fois. On note B_i l'événement « on tire une boule blanche au tirage numéro i ».

1. Montrer que X est bien définie presque sûrement c'est-à-dire que l'on tire la boule noire presque sûrement.
2. Donner la loi de X, montrer que X admet une espérance et une variance et les donner.
3. Maintenant, on décide d'ajouter une boule blanche dans l'urne après chaque tirage. On définit X de la même manière que ci-dessus.
   a) Montrer que X est bien définie presque sûrement c'est-à-dire que l'on tire la boule noire presque sûrement.
   b) Déterminer la loi de X.
   c) X admet-elle une espérance ?

Exercice 2

Un candidat passe trois concours indépendants avec une probabilité de réussite à chaque concours de $\frac{1}{3}$.

1. Quelle est la probabilité pour le candidat d'être reçu dans au moins une école ?
2. On suppose que chaque année, si le candidat est reçu dans une école (quelle qu'elle soit), il l'intègre. Dans le cas contraire, le candidat redouble et retente sa chance l'année suivante avec même probabilité de réussite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'années nécessaires à l'intégration d'une école. Déterminer la loi de X et donner le plus petit entier n pour lequel $P(X \leqslant n) > 90\%$.

Exercice 3

Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées $1, 2, \dots, n \dots$ On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de franchir la hauteur numéro n vaut $\frac{1}{n}$ et que les sauts sont indépendants. La sauteur est éliminé à son premier échec. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X, en justifiant leur existence.

Exercice 4

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et Y la variable aléatoire égale à 0 si X est paire et 1 sinon. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 5

Dans un laboratoire, on teste la mémoire des souris en réalisant l'expérience suivante :

- une souris doit choisir entre 4 portes d'apparence identique, l'une est « bonne » les autres sont « mauvaises ».
- chaque fois qu'elle choisit une mauvaise porte, elle reçoit une décharge éléctrique, puis est ramenée à son point de départ, et ce, jusqu'à ce qu'elle choisisse la bonne porte et dans ce cas elle est récompensée.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tentatives effectuées par la souris lorsqu'elle trouve la bonne porte.

1. Supposons dans cette question que la souris a de la mémoire. À chaque nouvel essai elle évite donc les mauvaises portes choisies auparavant, et elle choisit parmi les portes restantes de façon équiprobable. Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance ?
2. Mêmes questions lorsque l'on suppose que la souris n'a aucune mémoire , (elle choisit donc à chaque essai au hasard entre chaque porte).
3. Mêmes questions, enfin, lorsque l'on suppose que la souris a une mémoire immédiate, (elle ne se souvient que de l'essai précédent).
4. À présent, on ne sait pas quelle est la mémoire de la souris. On suppose que les trois situations sont équiprobables. On note M, A et I les événements « la souris a de la mémoire », « la souris n'a aucune mémoire » et « la souris a une mémoire immédiate ». On réalise l'expérience et on constate que la souris trouve la bonne porte après 4 tentatives. Quelle est la probabilité qu'elle ait de la mémoire ?

Exercice 6

Nicolas va dans une agence pour acheter des billets de train. Les clients doivent prendre un ticket pour attendre leur tour, ces tickets sont donnés dans l'ordre croissant. Nicolas arrive le premier le matin, il a le ticket numéro 1. Nicolas revient plus tard à l'agence pour échanger un billet. On admet qu'entre ses deux passages à l'agence, la variable aléatoire N égale au nombre de personnes se présentant à l'agence suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On appelle A l'événement « Nicolas obtient un numéro de ticket se terminant par le chiffre 1 ».

1. Pour quelles valeurs de N l'événement A est-il réalisé ?
2. Quelle est la probabilité de A ?

Exercice 7*

1. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p.
   a) Rappeler la valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   b) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la probabilité $P(X>k)$ en fonction de k et p.
   c) Montrer que pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$, $P_{[X>i]}(X>i+j) = P(X>j)$.
2. On souhaite montrer que réciproquement, si une variable aléatoire Y vérifie

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall i, j \in \mathbb{N}^*,\ P_{[Y>i]}(Y>i+j) = P(Y>j) \\ P(Y=1) = p \in]0,1[\end{cases}$$

   alors Y suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose donc ces trois propriétés.
   a) Calculer $P(Y>1)$.
   b) Calculer $P(Y>2)$ à l'aide de la propriété.
   c) En déduire $P(Y=2)$.
   d) Déterminer par récurrence les valeurs de $P(Y>k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   e) En déduire la valeur de $P(Y=k)$ pour tout k et conclure.

Exercice 8 *(les questions 2 et 3 sont indépendantes)*

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Les lancers sont indépendants.
On note P_k (respectivement F_k) l'événement : « obtenir pile (resp. face) au k^e lancer ».
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k, et qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.
Exemple : si la séquence obtenue commence par FFPPFFPFPPF..., on a $X=5$.

1. Préciser $X(\Omega)$ et calculer $P(X=2)$.
2. a) Écrire l'événement $[X=3]$ en fonction des événements P_k et F_k et en déduire la valeur de $P(X=3)$.
   b) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Écrire l'événement $[X=k]$ comme une réunion de $k-1$ événements incompatibles deux à deux et en déduire $P(X=k)$.
   c) Calculer $P(X=0)$. Interpréter le résultat.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2.b par une autre méthode.
   a) Soit $k \geqslant 3$. Montrer que si le premier lancer donne « pile », alors $[X=k]$ se réalise si et seulement si $P_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k$ se réalise.
   b) En raisonnant à partir du deuxième lancer, montrer que $P_{F_1}(X=k) = P(X=k-1)$.
   c) Déduire de ce qui précède, en utilisant la formule des probabilités totales, que :

$$\forall k \geqslant 3,\ P(X=k) = \frac{1}{2}P(X=k-1) + \frac{1}{2^k}.$$

   d) Pour tout $k \geqslant 2$, on pose $u_k = 2^k P(X=k)$.
   Exprimer u_k en fonction de u_{k-1}.
   Déterminer u_k en fonction de k et retrouver le résultat annoncé.
4. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.