Intégration 2
Intervalle quelconque

Exercice 1: Révisions 1

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F et préciser le signe de F sur $\mathcal{D}$.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}$ et dresser son tableau de variations.
3. Calculer la limite en 0.
4. Etudier le signe de $F(x) - \ln x$ pour $x \geq 1$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Exercice 2: Révisions 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'. Dresser alors le TV de f.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$. Qu'en est-il en 0 ?

Exercice 3: Révisions 3 : pour aller plus loin

Soit la fonction g définie par $g : x \mapsto \int_0^x \sqrt{x^2+t^2}dt$.

1. Pourquoi les méthodes des 2 exercices précédents ne s'appliquent-elles plus ici pour trouver le TV de g ?
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
3. **A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = cx|x|$, avec $c = \int_0^1 \sqrt{1+y^2}dy$.
4. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$ puis dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variations complet de g.

Exercice 4:

Nature des intégrales suivantes et en cas de convergence, calcul de la valeur :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u}du$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+2)^2}dt$ e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/t}}{t^2}dt$ g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}}$, $\beta \in \mathbb{R}$ i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}})dx$

Exercice 5:

Nature des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}dx$ d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ e) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

f) $\int_0^1 \frac{y-1}{\ln y}dy$ g) $\int_0^1 \ln x dx$ h) $\int_1^{+\infty}(\ln(u+1) - \ln u)du$ i) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}dx$ j) $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}dx$

Exercice 6:

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ converge et vaut 1.
2. Nature et calcul de $\int_0^1 t^{\alpha} \ln t\, dt$ pour $\alpha > -1$.

Exercice 7: Changement de variables

1. A l'aide du changement de variable proposé, étudier les intégrales suivantes (convergence puis calcul) :

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx\ (y = e^x)$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}\ (x = t^2)$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-e^t}dt\ (u = e^t)$

2. (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^4}dx$ est convergente.

   (b) A l'aide du changement de variable $y = x^3$, déterminer sa valeur.

3. (a) A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_1^x \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}dt$ pour $x \geq 1$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan} t}{t^2}dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 8:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

1. Etudier la parité de f.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ puis préciser sa valeur.
3. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$?

Exercice 9:

Calculer pour tout $x \geq 0$, $\int_{-x}^{x} \sin t\, dt$. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\, dt$?

Exercice 10:

1. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$
2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge. *On pourra s'inspirer des questions 1. et 2.*
4. Montrer alors que pour tout réel t, $|\sin t| \geq \sin^2 t$ puis que $|\sin t| \geq \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
5. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 11:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
5. Montrer la convergence et préciser la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx$.

Exercice 12:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} \times ((n-1)!)^2} \pi$.

Exercice 13: `Bilan : inspiré d'Edhec E 2004`

Le but est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$: soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n, puis calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) ** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
   (b) Donner la limite de la suite (u_n)
4. (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n pour tout $n \geq 2$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{-}$ puis conclure.

Exercice 14: `pour aller plus loin`

On pose pour x réel $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 15:

On définit la fonction f par $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dresser son tableau de variations. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Montrer que pour tout $t\geq 1$, $0\leq\frac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. ** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 16:

1. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1 t^n\ln(t)dt$. Montrer que l'intégrale I_n converge et calculer sa valeur.
2. Montrer que l'intégrale $I=\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t}dt$ est convergente. On admettra que de même, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1\frac{t^n\ln(t)}{1-t}dt$ converge.
3. (a) Montrer que pour tout $t\in]0,1[$, et $n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{1-t}-\sum\limits_{k=0}^{n}t^k=\frac{t^{n+1}}{1-t}$.

   (b) Montrer alors que $\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t}dt+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(1+k)^2}=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1-t}\ln(t)dt$.

   (c) En déduire qu'il existe une fonction f, prolongeable par continuité sur $[0,1]$ telle que :
   $$\left|I+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(1+k)^2}\right|\leq\int_0^1|f(t)|t^n dt.$$

   (d) Montrer qu'il existe un réel M tel que $\int_0^1|f(t)|t^n dt\leq\frac{M}{n+1}$.

   (e) En déduire que la série $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge et exprimer sa somme en fonction de I.

Fin