Probas 3

Probas à densité (continues)

Exercice 1:

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles définissent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant une densité associée. *En bonus :* existence et calcul de l'espérance.

$$F_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad F_2(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ (pour l'esp., vq la densité choisie est paire)}$$

Exercice 2:

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont des densités d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant la fonction de répartition associée. *En bonus :* existence et calcul de l'espérance.

$$f_1(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ pour } x \in \mathbb{R} \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_6(x) = \sin x + 1 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{a}{x^2+1}$.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.
   On introduit alors une variable aléatoire X de densité f : on dit que X suit la loi de Cauchy.
2. X admet-elle une espérance ?
3. Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{\pi} Arctan(x) + \frac{1}{2}$.

Exercice 4: *pour s'entraîner*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 5:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$ et on admet que Y est bien une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition notée G de Y
   (b) Montrer alors que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.
   (c) Mêmes questions avec $Z = X^2$.

Exercice 6: *pour s'entraîner*

Reprendre l'énoncé de l'exercice précédent avec $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Y = \ln X$.

Exercice 7: `Eml E 96`

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est bien une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de G de Y
   (b) Montrer alors que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 8: *pour aller plus loin*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et son espérance, si elle existe.
3. ** On pose $Y = \frac{1}{X}$ et $N = \lfloor \frac{1}{X} \rfloor = \lfloor Y \rfloor$ et on admet que Y et N sont des variables aléatoires.
   (a) Vérifier que Y est bien une variable à densité et préciser une densité. Y admet-elle une espérance ?
   (b) Déterminer la loi de N. N admet-elle une espérance ?

Exercice 9:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1, 1[)$, $Z = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+X}{1-X})$ et g la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $g(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

1. Rappeler une densité f de X, sa fonction de répartition F, ainsi que la valeur de son espérance.
2. (a) Montrer que g réalise une bijection de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations de g^{-1}.
   (b) Déterminer g^{-1}. En déduire la fonction de répartition de Z.
   (c) Vérifier que Z est une variable à densité, et préciser une densité de Z.

Exercice 10:
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Reconnaître la loi de $T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ (où $\lambda > 0$).
Application scilab : à l'aide de la syntaxe `rand()`, simuler une loi exponentielle de paramètre 5.

Exercice 11:
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On admet que $T = X^2$, et $U = \lfloor X \rfloor + 1$ sont bien des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé que X.

1. Rappeler une densité de X, sa fonction de répartition, ainsi que la valeur de son espérance.
2. Vérifier que T est bien une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
3. Reconnaître la loi de U. En déduire son espérance.

Exercice 12: `Edhec E 2008`
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Vérifier que f peut être considérée comme la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X. On note F sa fonction de répartition.(On ne calculera pas F).
2. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Exprimer la fonction de répartition de Y, notée G en fonction de F.
   (b) En déduire que Y est une variable à densité, et exprimer sa densité en fonction de f.
   (c) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 13: `Edhec E 2010` *pour s'entraîner*
Reprendre les questions de l'exercice précédent avec $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Y = \ln(|X|)$.
bonus : déterminer F.

Exercice 14: `Eml E 2006` *pour s'entraîner*
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ converge. On admettra qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.
2. Vérifier que F est une fonction de répartition d'une variable à densité X. Déterminer une densité de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Montrer que X^2 suit une loi exponentielle, dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance de X^2.

Exercice 15: *Un peu de calcul*

1. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $\forall x \geq 0$, $P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.
2. Exprimer l'intégrale $\int_0^1 e^{-(x-1)^2} dx$ à l'aide de Φ. Application numérique via la table de Φ. ($\sqrt{2} \simeq 1.41$).
3. Même question avec $\int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x-2} dx$.
4. Convergence et calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2x} dx$.
5. ** Reprendre l'intégrale de l'exercice précédent, et montrer qu'elle vaut effectivement $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice 16:
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2. En déduire que Y est bien une variable à densité, et préciser une densité.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}} dx$.

Exercice 17: *Loi lognormale*
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On admet que $Y = e^X$ est une variable aléatoire.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2. En déduire que Y est bien une variable à densité, et préciser une densité.
3. ** Montrer que Y admet une espérance et la calculer (on pensera à un changement de variable).

Variables aléatoires à densité et modélisation

Exercice 18:

Suite à un problème de réseau, un client contacte le service après-vente de son opérateur. Un conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance entre 14h et 15h. On suppose enfin, que ce technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau donné.

1. Quelle est la probabilité que le client patiente moins de 30 minutes ? entre 10 et 30 minutes ?

   On pourra commencer par introduire une variable aléatoire .... et deviner sa loi !

2. Donner une syntaxe scilab qui permet de simuler l'heure où le technicien appelle le client.

Exercice 19:

Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre restreint de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la loi de la durée de vie de ce composant, en années, est la loi exponentielle de paramètre 1/4.

1. Rappeler une densité de cette loi, ainsi que son espérance et sa fonction de répartition.
2. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de quatre ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne sans défaillance au moins 6 ans, sachant qu'il a déjà fonctionné 5 ans ?
4. Pendant combien de temps, 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ?
5. Donner la période de garantie optimum pour remplacer moins de 15% des disques durs sous garantie.

Applications numériques : $e^{-1} \simeq 0.36$; $e^{-1/4} \simeq 0.78$;
$4\ln(2) \simeq 2.77$ (soit entre 2 ans 9 mois et 2 ans 10 mois) et $-4 * \ln(0.85) \simeq 0.65$ (soit entre 7 et 8 mois)

Dans les exercices suivants, on pourra utiliser sans démonstration le dernier résultat du cours :
si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Et ainsi utiliser la table de Φ (page 4 du poly).

Exercice 20:

La taille en cm d'un homme (en France) suit une loi normale de paramètres $m = 176cm$ et $\sigma = 7cm$.

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
2. Un fabricant de vêtements pour hommes souhaite utiliser cette loi pour produire son stock.
   (a) Déterminer le réel a, tel que l'intervalle $[m-a, m+a]$ contienne en moyenne 90% des tailles des hommes.
   (b) *bonus :* Le fabricant en déduit 4 tailles S, M, L et XL correspondant respectivement aux intervalles $[m-a, m-\frac{a}{2}]$, $[m-\frac{a}{2}, m]$, $[m, m+\frac{a}{2}]$ et $[m+\frac{a}{2}, m+a]$.
   Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

Applications numériques : $\frac{9}{7} \simeq 1.28$; $1.65 * 7 \simeq 11.5$

Exercice 21:

On suppose que la distance X en mètres parcourues par un javelot lancé par un athlète A suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :
1. exactement 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
2. exactement 25% des javelots atteignent moins de 50 mètres.

Déterminer alors les paramètres de la loi normale de X.
Quelle est la longueur moyenne parcourue par un javelot ?

Application numérique : on ne s'épuisera pas à résoudre le système ... on trouve $m \simeq 58.6$ et $\sigma \simeq 12.8$.

Exercice 22:

On estime que 1000 passagers ont réservé une place dans le TGV Bordeaux-Toulouse du vendredi soir à 19h30. On considère la variable aléatoire X, égale à l'heure d'arrivée dans la gare de départ d'un voyageur calculée par rapport à 19h30 : $X = 0$ à 19h30, et X est exprimée en minutes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-15, 8^2)$.

1. En moyenne, à quelle heure arrivent les voyageurs dans leur gare de départ ?
2. Déterminer l'heure à laquelle les portes du train doivent être ouvertes pour qu'il n'y ait pas plus de 100 voyageurs qui attendent sur le quai.
3. Calculer le nombre de voyageurs ayant manqué le train, si celui-ci accuse un retard de 5 minutes.

Application numérique : $8 * 1.28 \simeq 10.2$