Ensembles-Applications

Niveau 2

Exercice 1. Soient A, B et C trois ensembles. On suppose que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subseteq B \subseteq C$.

Exercice 2. Soient A, B et C trois ensembles. On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Montrer que $B = C$. Le résultat est-il encore valable si l'on supprime l'une des deux hypothèses ?

Exercice 3. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1\}$ et $B = \{(1-2t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer les équivalences suivantes.

a. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

b. $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

c. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = E$.

d. $\big((A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)\big) \Leftrightarrow B = C$.

Exercice 5. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Décrire géométriquement D. Peut-on écrire D comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$?

Exercice 6. Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ l'application définie par $x \mapsto x^2$. Dire, dans les cas suivants, quand elle est injective, bijective ou surjective : $E = F = \mathbb{N}$? $E = \mathbb{Z}, F = \mathbb{N}$? $E = \mathbb{Q}, F = \mathbb{R}_+$? $E = [-1,1], F = [0,1]$? $E = F = \mathbb{R}_+$?

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles injectives, bijectives ou surjectives ?

a. $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$.

b. $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$.

c. $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$.

d. $\delta : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

e. $\varepsilon : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, x \mapsto \arctan x$.

f. $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, définie par $f(n,p) = 2^n(2p+1)$. Montrer que f est bijective. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 9. Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. On considère la fonction

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

Montrer que ψ est injective si et seulement si $A \cup B = E$ et que ψ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit bijective.

Exercice 10 (Image réciproque)**.** Soit $f : E \to F$ une application.

a. Si f est bijective, comparer $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\{y\})$.

b. Montrer que $\forall A \subseteq E,\ A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Montrer que l'on peut remplacer l'inclusion par une égalité si et seulement si f est injective.

c. Montrer que $\forall B \subseteq F,\ f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Montrer que l'on peut remplacer l'inclusion par une égalité si et seulement si f est surjective.

Exercice 11. Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective.
(ii) Pour toutes parties A et B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Déterminer $g = f \circ f \circ \cdots \circ f$ où il y a n termes f. Pour quels x réels g est-elle définie ?

Exercice 13. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si « $\forall A \in \mathscr{P}(E), f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ».

Exercice 14. Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 15. Soient a, b, c trois réels avec $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On définit $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ et $f : E \to E$ donnée par $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Blaque du jour

Deux personnes qui font une promenade dans une montgolfière sont perdues et décident de redescendre plus bas pour demander leur chemin. Elles aperçoivent sur deux autres personnes qui discutent sur la route et demandent :
- « Excusez-moi, messieurs. Pouvez vous nous dire où nous sommes là ? »
- « Vous êtes dans une montgolfière »

Surprises, les deux personnes de la montgolfière les remercient quand même et reprenne de l'altitude. Un peu plus loin, l'un dit à l'autre : « A mon avis, ces deux là sont des mathématiciens. »
- Qu'est-ce qui te fait dire ça ?
- Et bien, ils ont mis du temps à nous répondre, leur réponse est parfaitement juste, mais elle ne sert absolument à rien.

Pendant ce temps, les deux mathématiciens se disent : « C'était sûrement des économistes ces deux là. Ils nous posent des questions évidentes, et après, s'ils sont perdus c'est de notre faute. »

FIN