Nombres Complexes
Niveau I

Exercice 1:

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(3+2i)(-1-i)$ b) $\dfrac{5-i}{2+3i}$ c) $\dfrac{7+i}{1-i}+\dfrac{7-i}{1+i}$ d) $(5+3i)^2$

e) i^{2018} (on pourra commencer par rappeler la forme algébrique de i^2, i^3, i^4, ...).

Exercice 2:

Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) $1+i\sqrt{3}$ b) $(1+i)^n$ où $n\in\mathbb{N}$ c) $1-e^{i\pi/3}$ d) $\dfrac{2}{1+i}$ e) $(1+i\sqrt{3})^n$

f) $1+e^{i\theta}$ *indication : factoriser par l'angle moitié* $e^{i\theta/2}$ g) $1-e^{i\theta}$ où $\theta\in\mathbb{R}$

Exercice 3:

Calculer (on choisira la forme la plus facile !) :

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$ b) $\dfrac{1+i\tan(x)}{1-i\tan(x)}$ où $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ c) $(\sqrt{3}+i)^5$ d) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$

Exercice 4:

Résoudre les équations d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivantes :

a) $(z+\frac{9}{z})\in\mathbb{R}$ b) $\left|\dfrac{z-2}{iz+3}\right|=1$ c)** $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z|$

Exercice 5:

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a)$z^4=i$ b) $z^3=\dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$ c) $z^7=\dfrac{1+i}{2}$ d) $z^n=1-i\sqrt{3}$ e) $z^n=\bar{z}$

Exercice 6: *Calcul de sommes*

1. Résoudre pour $x\in\mathbb{R}$, l'équation $e^{ix}=1$.
2. Calculer $S=\sum\limits_{k=0}^{n}e^{ikx}$, pour $n\in\mathbb{N}$ fixé.
3. Trouver la forme algébrique de S. (*on pourra penser à la factorisation par l'angle moitié*).
4. Donner alors les expressions de $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

Exercice 7: Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Ecrire la forme algébrique de $(e^{ib}+1)^n$.
2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(a+kb)}$.
3. En déduire l'expression de $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb)$

Exercice 8: *pour aller plus loin ...*

1. Simplifier $(1+j)^5$ et $\dfrac{1}{(1+j)^4}$ où $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=1$.
3. A l'aide des formules d'Euler, écrire $\sin^3(x)\times\cos(x)$ en fonction de $\sin(4x)$ et $\sin(2x)$.
   (méthode dite de linéarisation : transformer du $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en du $\cos(px)$ et $\sin(px)$.
   exemple d'intérêt : recherche de primitive ...)
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z=1+i\sqrt{3}$.
5. ** A l'aide de la formule de Moivre puis de la formule du binôme, écrire $\cos(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\sin(x)$.

Nombres Complexes
Niveau II

Notations algébrique et exponentielle

Exercice 1 : Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}, \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2 : Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{3}{1-i}, \quad z_2 = \frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1-i)^2}, \quad z_3 = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}.$$

Exercice 3 : Soient θ, θ' deux nombres réels.

1. Transformez $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ en factorisant par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont des réels.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = 1 + e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{4i\pi/3} - 1$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifiez les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n, \quad z_2 = \left((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})\right)^n + \left((\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3})\right)^n.$$

Exercice 5 : Démontrez que pour tous u et v dans $\mathbb{C}$,

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,(|u| + |v|).$$

Racines $n^{\text{ièmes}}$ & Equations polynomiales

Exercice 6 : Déterminez les racines carrées de $9 + 40i$ et les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

Exercice 7 :

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes
$$u = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}, \quad v = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^6 = u$ et $z^4 = v$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^5 = 1$.
2. $z^7 = 1 + i\sqrt{3}$.
3. $z^6 - (1+2i)z^3 + 3(1+i) = 0$.
4. $z^6\bar{z} = 1$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad z^2 - (2+3i)z + 3i - 1 = 0.$

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^n = 1.$

Applications à la trigonométrie

Exercice 11 :

1. Présentez sous forme trigonométrique les nombres complexes $u = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ et $v = 1 - i$.
2. En déduire une présentation trigonométrique de u/v, puis les valeurs exactes de $\cos\pi/12$ et $\sin\pi/12$.

Exercice* 12 : Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$, et $\cos^5 x \sin x$.

Exercice* 13 : Soient $a, b, r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculez : $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$, $\quad S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k \cos(a+kb)$ $\quad , \quad T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r^k \sin(a+kb).$

Exercices supplémentaires

Notations algébrique et exponentielle

Exercice 14 : Soit z un nombre complexe de module 1, montrez que $\dfrac{i\bar{z}-1}{z-i}=-\bar{z}$.

Exercice 15 : Soient a et b des nombres réels.Résoudre dans $\mathbb{C}$ le sytème $\left\{\begin{array}{rcl} z+|z| & = & a+ib \\ z-|z| & = & a-ib \end{array}\right.$

Exercice 16 : Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z=(1+i\tan\varphi)^2$, où $\varphi\in[0,\pi/2[$.
2. $z=\dfrac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}$, où $\varphi\in]0,2\pi[$.
3. $z=\dfrac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{\sqrt{1+\sin 2\varphi}+i\sqrt{1-\sin 2\varphi}}$, où $\varphi\in[0,\pi/2[$.

Exercice 17 : Déterminez l'ensemble des entiers naurels $n\in\mathbb{N}$ pour lesquels $(1+i)^n\in\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Déterminez l'écriture trigonométrique de

$$\frac{e^{i\pi/6}-i}{e^{i\pi/3}+1},\quad e^{i\theta}+e^{2i\theta},\quad \left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{43},\quad \frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}.$$

Exercice 19 : Démontrez que $\quad (\forall (z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\star),\ \left(|z+z'|=|z|+|z'| \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^+\ ;\ z=\lambda z'\right)$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$

Exercice 20 : Déterminez les racines carrées de $22+i8\sqrt{3}$.

Exercice 21 : Déterminez les racines quatrièmes de $28+96i$.

Exercice 22 : Soit $n\geq 2$. On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Démontrez que $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\omega^k=(-1)^n$.

Exercice 23 : Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2 et ω une racine $n^{\text{ième}}$ de 1 différente de 1 lui-même. Calculez les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.
4. $\sum\limits_{k=1}^{n}(2+\omega^k)^n$.

Equations

Exercice 24 : Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n=(z+1)^n$.
On donnera la réponse sous forme exponentielle ou trigonométrique.

Exercice 25 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^{2n}-2z^n\cos(na)+1=0$$

où $n\in\mathbb{N}^\star$ est un entier naturel non nul et $a\in\mathbb{R}$ un réel.

***Exercice* 26 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$$

***Exercice* 27 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2(1-z^2) = 16$$

***Exercice* 28 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^4 - i\sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}(i-1)z - 8 - 8i = 0$$

Indication : on vérifiera que cette équation possède une solution imaginaire pure

Applications à la trigonométrie

***Exercice** 29 :** Linéariser $\sin^4 x$, $\cos^3 x \sin^4 x$ et $\cos^4 x$.

***Exercice** 30 :** Démontrez que pour tous nombres réels p et q,

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \times \cos\frac{p-q}{2}$
2. $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \times \sin\frac{p-q}{2}$
3. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \times \cos\frac{p-q}{2}$
4. $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2} \times \cos\frac{p+q}{2}$

***Exercice* 31 :** Linéariser $\sin^4 x$ et $\cos^4 x$.

***Exercice* 32 :** Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$, $\cos^3 x \sin^4 x$ et $\cos^5 x \sin x$.

***Exercice* 33 :** On considère le nombre complexe $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

1. Déterminez en procédant de deux manières différentes les racines carrées de z
   on pourra remarquer que $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$
2. Retrouver ainsi les valeurs exactes de $\cos\pi/12$ et $\sin\pi/12$.

***Exercice* 34 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$

1. Démontrez que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k) = \sum_{l=0}^{n-1} z^l$$

2. En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

***Exercice* 35 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul et $\theta \in]0, \pi[$. Calculez

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\sin k\theta$$

***Exercice*** 36 :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimez $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.