Suites Numériques
Révision Niveau Terminale

Exercice .1

On considère la suite (U_n)**, telle que:**

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^3 + 2}{U_n^2 + 1}$$

1) **Montrer par récurrence que :** $(\forall n \in IN) \;;\; 0 < U_n < 2$
2) **Etudier les variations de la suite** (U_n) .
3) a) Montrer que $(\forall n \in IN) \;;\; 0 < 2 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(2 - U_n)$.
   b) **En déduire que** $(\forall n \in IN) \;;\; 0 < 2 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
   c) **Montrer que** (U_n) **est convergente et calculer sa limite.**

Exercice .2

On considère la suite (U_n)**, telle que:**

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^3}{3U_n^2 + 1}$$

1) **Montrer par récurrence que :** $(\forall n \in IN) \;;\; 0 < U_n$
2) **Etudier les variations de la suite** (U_n) .
3) a) Montrer que $(\forall n \in IN) \;;\; 0 < U_{n+1} < \frac{1}{3}U_n$.
   b) **En déduire que** $(\forall n \in IN) \;;\; 0 < U_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   c) **Montrer que** (U_n) **est convergente et calculer sa limite.**

Exercice .3

On considère la suite (U_n)**, telle que:** $\begin{cases} U_0 = 1 \;;\; U_1 = 4 \\ U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \end{cases}$

1) **Calculer** U_2 .
2) **On pose pour tout** $n \in IN$: $V_n = U_{n+1} - U_n$
   a) Déterminer la nature de (V_n)
   b) **Calculer** V_n **en fonction de** n .
3) **Calculer la somme** $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
4) **En déduire** U_n **en fonction de** n **, puis calculer** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice .4

On considère la suite (U_n)**, telle que:** $\begin{cases} U_0 = 1 \;;\; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \end{cases}$

1) **Calculer** U_2 .
2) **On pose pour tout** $n \in IN$: $V_n = U_{n+1} - U_n$
   a) **Montrer que** (v_n) **est géométrique et déterminer sa raison** q .
   b) **Calculer** V_n **en fonction de** n .
3) **Calculer la somme** $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
4) **Montrer que** $(\forall n \in IN) \;;\; U_{n+1} = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
5) **en En déduire** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ **, puis** $\lim S_n$.

Exercice .5

On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$**, telle que:** $\begin{cases} U_0 = 2 \\ 5U_{n+1} = 2U_n + 9n + 15 \end{cases}$

On pose pour tout $n \in IN$: $V_n = .U_n - 3n$

1) **Calculer** U_1, V_0, V_1 .
2) **Calculer la somme** $A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
3) Montrer que $(V_n)_{n \in IN}$ **est une suite géométrique de raison** $q = \frac{2}{5}$.
4) **Calculer** V_n **puis** U_n **en fonction de** n .
5) **En déduire** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
6) **Calculer la somme** $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

Exercice .6

On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$**, telle que:** $\begin{cases} U_0 = -1 \;;\; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$

1) **Calculer** U_2 .
2) **On pose pour tout** $n \in IN$: $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ et $W_n = \frac{U_n}{V_n}$
   a) Démontrer $(V_n)_{n \in IN}$ **est géométrique.**
   b) **Montrer que** $(\forall n \in IN) \;;\; u_n = \frac{3n - 1}{2^n}$.
3) **Montrer que** $(\forall n \geq 2) \;;\; \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$.
4) **Calculer** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ **et** $\lim\left(\frac{n}{2^n}\right)$.

Exercice .7

On considère la suite (U_n)**, telle que:** $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \sqrt{2} \end{cases}$

On pose pour tout $n \in IN^*$: $V_n = U_n - 2$

1) que (V_n) **est géométrique et déterminer sa raison** q .
2) **Calculer** U_n **en fonction de** n .
3) **Calculer** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
4) **Calculer la somme :** $S_n = (U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n)$.