Suites Numériques

Partie I : Ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 1. Soient x, y des réels. Montrer que $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$. En déduire une formule pour $\min(x,y)$.

Exercice 2. Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels ainsi que leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient.

Exercice 3. Montrer que $\frac{\ln 5}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 4. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ bornées non vides. Montrer que le sous-ensemble des réels défini par $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$ admet une borne supérieure qui vérifie $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 5. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants.

a. $A = \{(1+(-1)^n)2^n, n \in \mathbb{N}\}$.

b. $B = \{(1-(-1)^n)2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.

c. $C = \{x + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_+^*\}$.

d. $D = \{\frac{n}{mn+1}, m, n \in \mathbb{N}^*\}$

e. $E = \{\frac{n}{mn+1}, m, n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 6 (Partie entière (I)).

a. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$

b. Montrer que pour $n \geqslant 1$,

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

En déduire $\left\lfloor \sum_{k=1}^{1020099} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

Exercice 7 (Partie entière (II)).

a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 8 (Partie entière (III)).

a. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$.

b. En déduire que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est impaire.

c. Que dire de $((2+\sqrt{3})^n - \lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 9. (Irrationnels) .

a. Soit $x, y \in \mathbb{Q}$. Montrer que si $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$ alors, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.

b. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{m} \in \mathbb{N}$.

c. Soit de plus $n \geqslant 1$. Montrer que si $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}$.

d. Déterminer des suites (a_n) et (b_n) d'entiers tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers p_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n} + \sqrt{p_n - 1}$.