Suites Numériques

Partie II : Suites Remarquables

1. Généralités

Exercice 1. (**)

1. Calculer les premiers termes de la suite

$$\begin{cases} u_0 = & 3 \\ u_{n+1} = & \sqrt{1+u_n^2}, \end{cases}$$

puis conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.

2. On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = & 0 \\ u_{n+1} = & u_n + 2n - 11. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$, où a, b et c sont trois réels à préciser.

Exercice 2. Suites couplées (*)

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in N}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

1. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme à préciser.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est constante.
   (b) Préciser quelle est la valeur constante de v_n.
3. A l'aide des questions 1(b) et 2(b) , calculer les expressions de a_n et b_n pour tout entier naturel n.

Exercice 3. (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^3$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que v_n est bien définie pour tout n, puis reconnaître v_n. Déterminer alors v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4. (**)

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$.
2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 5. (**)

On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n < 1$.
2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

2. Suites arithmético-géométriques

Exercice 6. (*)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = u_n/3^n$ pour tout $n \geq 0$.
Reconnaître $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire le terme général de u.

Exercice 8. (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \ln u_n$.

1. Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: « u_n défini et $u_n > 0$ »
2. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$.
3. Déduire les termes généraux de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Suite récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 9. (*)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 10. (**)

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$ et la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 11. (**)

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$ et la relation

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - \frac{9}{4}u_n.$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 12. (***)

Soit a un réel. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = a+1$ et la relation

$$u_{n+2} = 2(a+1)u_{n+1} - (a^2+1)u_n.$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 13. (**) **Différentes méthodes**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n & (1) \\ \forall n\in\mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n & (2) \end{cases}$$

Les questions 2 et 3 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 2 manières indépendantes.

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2
2. **Méthode 1 :**
   (a) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. Montrer que (s_n) est géométrique et déterminer son terme général.
   (b) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. Montrer que (d_n) est constante et déterminer son terme général.
   (c) Déduire en résolvant un système les termes généraux de (a_n) et (b_n).
3. **Méthode 2 :**
   (a) En combinant les relations (1) et (2) montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$
   (b) Déterminer le terme général de (a_n).
   (c) Déduire celui de (b_n) à l'aide de la relation de récurrence (1)