Suites Numériques

Partie III : Convergence et Limites

1. Limites usuelles et croissances comparées

Exercice 1. (*)

Déterminer les limites des suites suivantes de termes général (on prendra $n \geq 2$ afin que toutes les suites soient bien définies) :

1. $\frac{5}{n} - 2$
2. $\dfrac{3n - 2n^3}{n^2 + 1}$
3. $\dfrac{n^2 + 3(-1)^n}{2n}$
4. $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, 0 < a < b$
5. $2n - \ln n$
6. $n^2 e^{-n}$
7. $\dfrac{(n+2)!}{(2n^2+1) \times n!}$
8. $\sqrt{n^2+1} - n$
9. $2^n - 3^n + 4^n$
10. $\ln(n)^7 n^{800} e^n$

Exercice 2. (*)

Soit u la suite de terme général $\dfrac{n!}{a^n}$.

1. **Si 0≤a≤1 :**. Déterminer la limite de u.
2. **Si** $a > 1$ **:**
   (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$.
   (b) Déduire que si $n \geq n_0$ alors : $u_n \geq 2^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (c) Déduire la limite de u.

Exercice 3. (**)

Déterminer les limites des suites suivantes de termes général :

1. $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
2. $\frac{3^{n+2}-2^n}{3^n+2^{n+1}}$
3. $\frac{\sin(n)}{n}$

2. Valeur absolue et partie entière

Exercice 4. (***) Montrer les assertions suivantes :
— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$

Exercice 5. (**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

Exercice 6. (*) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x-y| \leq 1$ et $4 \leq |y| \leq 6$. Montrer qu'alors $3 \leq |x| \leq 7$.

Exercice 7. (**) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

3. Bornes supérieures et bornes inférieures

Exercice 8. (**)
Déterminer les bornes supérieure et inférieure (si elles existent) de $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ lorsque n est pair et $u_n = 2^{-n}$ lorsque n est impair.

Exercice 9. (***)
Montrer que l'ensemble $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est borné. Quelles sont ses bornes inférieure et supérieure ?

Exercice 10. (**) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.
Montrer que $SupA$ et $InfB$ existent et que $SupA \leq InfB$.

4. Limites de suites réelles

Exercice 11. (**)
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ et $u_n + v_n \to a+b$.
Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 12. (*)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $(u_n+v_n)_n$ et $(u_n - v_n)$ convergent. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 13. (**)
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0.$$

Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 14. (***)

Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0,1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle vers 0 ?

Exercice 15. **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{n^2}{n^2+n} \leq w_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$
2. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?

Exercice 16. **

On considère la suite a de terme général : pour tout $n \geq 1$, $a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, a_n existe.
2. Déterminer le signe de a_n pour tout $n \geq 1$, puis la monotonie de la suite a.
3. Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 17. (**)

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante de limite l. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1) Montrer que (v_n) est croissante.
2) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} \geq \frac{u_n+v_n}{2}$.
3) En déduire que $(v_n)_n$ converge vers l.

Exercice 18. (**) - Suite harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

2) Montrer que $(H_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 19. (*)

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \ \text{ et }\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que ces suites convergent vers une limite commune l.

Exercice 20. (*)

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ \text{ et } \ S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que ces suites convergent vers une limite commune l.

Exercice 21. (**) - Moyenne arithmético-géométrique

1) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir que

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

2) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, \ v_0 = b, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

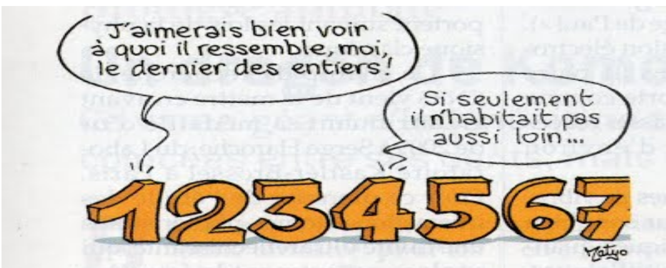
3) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Cette limite est appelé la moyenne arithmético-géométrique de a et de b et est notée $M(a,b)$.
4) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
5) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 22. (**) - Révisions

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites déterminées par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \ \text{ et } \ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1) Montrer que $(u_n - v_n)$ est constante.
2) Montrer que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3) Exprimer les termes généraux des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.



F I n
E i n