Fonctions Réelles

Partie I : Suites Récurrentes

Blague du jour

Comment retenir les chiffres après la virgule de $\pi \approx 3,1415926535\cdots$?
Que j'aime faire apprendre un nombre utile aux sages : On compte le nombre de lettres dans chaque mot, donc que=3, j=1, aime=4, ... en apprenant en plus cette phrase "*Immortel Archimède, artiste, ingénieur, Qui de ton jugement peut priser la valeur ? Pour moi ton problème eut de pareils avantages*", on retient 30 chiffres après la virgule.

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. Les contributions principales de Cesàro appartiennent au champ de la géométrie différentielle, notamment la construction d'une courbe fractale, la "courbe à flocon de neige" de Koch, continue mais dérivable nulle part. Il proposa aussi une définition possible de la limite d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme "Somme de Cesàro". Sa mort fut tragique, elle se produisit alors qu'il tentait de sauver son plus jeune fils Manlio qui était en train de se noyer

Exercice 1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 2$.

1. Montrer que cette suite est bien définie et strictement croissante.
2. Étudier sa convergence.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Pour quels réels a cette suite est bien définie ?
2. Si (u_n) converge, quelles sont les limites possibles ?
3. Étudier la convergence en fonction du paramètre a.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$. On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ est stable par f.
2. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et déterminer les limites potentielles.
3. Que dire des sens de variations des sous-suites u_{2n} et u_{2n+1} ?
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$.
5. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 4. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u_n})$$

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Quelle est la seule limite possible ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Soit $v_n = u_n - \ell$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de a.

3. Application : on considère un carré de côté 1. On le partage en 9 carrés égaux, et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 6. Soit $N \geq 2$ un entier. On cherche une approximation de $\sqrt{N}$.

1. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^2 - N$. Comment est définie la suite récurrente obtenue ?
2. Quels sont les points de départ pour lesquels la méthode de Newton donne une suite qui converge effectivement vers $\sqrt{N}$.
3. Soit (u_n) une telle suite. On suppose que $\sqrt{N} < u_0 < \sqrt{N} + 1$. Montrer que pour tout entier n, on a $0 < u_{n+1} - \sqrt{N} \leq (u_n - \sqrt{N})^2$. On dit que la convergence est quadratique.
4. Et pour approximer $N^{\frac{1}{k}}$, avec k un entier ?

Exercice 7 (Pour aller plus loin : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)**.** Pour chacune des récurrences ci-dessous, trouver une base de l'ensemble des solutions et donner l'expression du terme général de la suite qui vérifie cette récurrence et $u_0 = 1$, $u_1 = 0$. On pourra s'aider des méthodes exposées dans le devoir.

1. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$.   2. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.   3. $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 8u_n = 0$.

Fin