Fonctions Réelles

Partie II : Limites-Continuité-Dérivation

Exercice 1

Déterminer, si elles existent les limites de $\dfrac{2x^4+5x^2-7x}{(x+1)^4-1}$ en $+\infty$, $-\infty$ et 0.

Exercice 2

Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes au point x_0 :

$$e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \text{ en } x_0=+\infty, \qquad \frac{x+\frac{1}{x^2}-2}{x-1} \text{ en } x_0=1, \qquad \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \text{ en } x_0=4$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \text{ en } x_0=0, \qquad (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \text{ en } x_0=0, \qquad \frac{\ln x}{x^2-1} \text{ en } x_0=1$$

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \text{ en } x_0=0, \qquad \frac{x^2+e^x}{x^2+1} \text{ en } x_0=+\infty, \qquad \frac{x^2+e^x}{x^2+1} \text{ en } x_0=-\infty.$$

Exercice 3

Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes quand x tend vers x_0.

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} \text{ en } x_0=+\infty, \qquad e^x x^2 \ln(\sqrt{x}) \text{ en } x_0=0, \qquad \frac{(\ln x)^4}{x^3} \text{ en } x_0=+\infty,$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2} \text{ en } x_0=+\infty, \qquad \frac{e^{1/x}}{\ln x} \text{ en } x_0=0, \qquad (e^x-1)\ln x \text{ en } x_0=0.$$

Exercice 4

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

1. $f(x)=x^x$ définie sur $]0,+\infty[$.
2. $g(x)=(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$ définie sur $]0,+\infty[$.
3. $h(x)=(1-x^2)\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ définie sur $]-1,1[$.

Exercice 5

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x\cos\frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 & \\ f(x)=e^{1/x} & \text{si } x<0 \end{cases}$.

Exercice 6

Étudier la continuité des fonctions $x\mapsto x-\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ et $x\mapsto \lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

Exercice 7

1. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $a\in[0,1]$ tel que $f(a)=a$.
2. Soit $g:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. Montrer que g admet un point fixe.

Exercice 8

1. Étudier les variations de la fonction $f_n(x) = \ln x - \dfrac{1}{x^n}$. Montrer que l'équation $\ln x = \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ a une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et déterminer son sens de monotonie.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 9

1. Montrer que la fonction cos réalise une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ sur un intervalle que l'on déterminera. Sa réciproque est appelée Arc cosinus et elle est notée Arccos.
2. Calculer Arccos(1), Arccos(0), Arccos$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Dresser le tableau de variations de Arccos et tracer sa représentation graphique.
4. Pour $x \in [-1, 1]$, calculer $\cos(\text{Arccos}(x))$ et $\sin(\text{Arccos}(x))$.
5. Montrer que Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. Est-elle dérivable en -1 et 1 ?
   Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Étudier de même les variations, la dérivabilité et la dérivée de la fonction Arcsin, réciproque de la restriction de sin à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. Montrer que f est constante. *(On pourra montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$).*

Exercice 11

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \sqrt{t}$.

1. Soit $x > 0$. Montrer que $\forall t \in [x, x+1]$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant f'(t) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. En déduire que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 12

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{x - a}$. *(On pourra interpréter le quotient comme un taux d'accroissement).*

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 14

Pour les fonctions f suivantes, donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée :

1. $f(x) = \dfrac{-3x+2}{5x+4}$,
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$,
4. $f(x) = \operatorname{Arctan}(\ln(1+x^2))$.
5. $f(x) = x^x$.
6. $f(x) = (\ln(2x^2+3e^x))^2$.
7. $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$.
8. $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{x^2-3x+2}$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{\tan^2 x}$.
10. $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 15

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \cos\sqrt{x}$.
Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
Est-ce que f' est continue sur $[0, +\infty[$?

Exercice 17

Est-ce que les fonctions suivantes sont dérivables en 0 ?

1. $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
2. Déterminer la seule limite possible si la suite (u_n) converge.
3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   <u>Indication</u> : Commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$.

Exercice 19 *d'après BAC C/E 1989*

Soit h la fonction définie sur $\mathrm{I} = [1, \mathrm{e}]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

1. Étudier les variations de la fonction h.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $h(x) \in \mathrm{I}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant h'(x) \leqslant 0$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = x$ a une unique solution α dans l'intervalle I.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $|h(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.
6. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   b) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.
   c) Écrire un programme `Scilab` qui demande une précision $\mathtt{e}$ et qui renvoit une valeur approchée de α à $\mathtt{e}$ près. *(Le programme calculera une valeur satisfaisante de u_n).*

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$.

1. Montrer que f établit une bijection sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Déterminer en quels points la réciproque est dérivable puis calculer sa dérivée.

Exercice 21

On définit la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan^3(x)$ où $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Montrer que f établit une bijection de I dans un intervalle J que l'on déterminera.
2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.
3. Déterminer $(f^{-1})'(1)$.