

Integration sur un segment

Exercice 1:

Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx, \quad J = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/t}}{t^2} dt, \quad K = \int_0^2 \frac{e^y}{e^y+3} dy, \quad L = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln t}} dt, \quad M = \int_1^4 \sqrt{y}(y-2\sqrt{y}) dy$$

$$N = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx, \quad P = \int_{-1}^1 |x^2 - x| dx, \quad Q = \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad R = \int_0^1 \max(x, \frac{1}{3}) dx.$$

Exercice 2:

Déterminer les intervalles où il y a existence de primitives pour les fonctions suivantes, et

le cas échéant les calculer : $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $g(x) = x\sqrt{3-x}$ $h(x) = \frac{3}{x(x-1)}$.

Exercice 3:

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses.

$$I = \int_0^{10} \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx \quad (y = x^2), \quad J = \int_0^{10} \frac{1}{e^t+e^{-t}} dt \quad (y = e^t), \quad K = \int_{1/2}^2 \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \frac{\ln x}{x} dx \quad (t = \frac{1}{x})$$

$$L^{**} = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \quad (y = \frac{x}{x+1}), \quad M^{**} = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}} dt \quad (x = 1+e^t), \quad N^{**} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} dt \quad (u = \cos t)$$

Exercice 4:

Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_1^2 te^t dt, \quad J = \int_0^{-2} t^2 e^{5t} dt, \quad K = \int_1^9 y^3 \ln y dy, \quad L = \int_1^e x(\ln x)^2 dx, \quad M = \int_0^1 y^3 e^{y^2} dy$$

$$N = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx \quad (2 \text{ méthodes}), \quad P = \int_0^{\pi/4} e^t \cos(4t) dt.$$

Exercice 5:

Montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos^3(t) dt \geq 0$. Comment pourrait-on montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos^3(t) dt > 0$?

Exercice 6:

- Calculer pour tout $n \geq 2$, $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx$.
- Montrer que $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}$.
- On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}$: montrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 7: fondamentale!

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+tdt}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{2} \frac{1}{n+1}$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 8:

1. Pour $x \neq -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$.

2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \ln 2 - u_n$ où l'on a posé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

3. Montrer alors que $\left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 9:

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Donner la monotonie de $(I_n)_{n \geq 0}$.

2. Montrer : $\forall n \geq 0$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3. Montrer : $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.

4. En déduire la limite de J_n puis celle de nJ_n .

Exercice 10:

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.

4. Montrer : $\forall n \geq 0$, $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la limite de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 11:

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} dx$.

1. Calculer u_0 . (On pourra écrire $\frac{1}{1-x^2}$ sous la forme $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$), puis u_1 .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. En déduire u_2 et u_3 .

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. Conclusion ?

Exercice 12: *Un grand classique : les intégrales de Wallis*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$. En déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n .
4. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
5. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
6. En déduire l'expression de W_{2n+1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13: *Un peu plus abstrait*

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
2. Soit f une fonction C^1 sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$. Montrer que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 14:

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F , et préciser son signe.
2. Etudier la parité de F .
3. Justifier que F est C^1 sur \mathbb{R} , puis dresser son tableau de variations. Retrouver alors le signe de F .

Exercice 15: Escp E 89

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$.

1. a) Justifier que g est bien définie sur \mathbb{R} .
 b) Montrer que g est une fonction impaire.
 c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. a) Justifier que g est de classe C^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
 b) Dresser le tableau de variations de g . On précisera $g(0)$.
 c) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[$, $x \exp(-4x^2) \leq g(x) \leq x \exp(-x^2)$. En déduire la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Exercice 16:

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^2 e^t dt$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur. (on pourra proposer 3 méthodes!)

Exercice 17:

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
2. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Exercice 18: on complique les calculs ...

Soit h la fonction définie par $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h .
2. Trouver le signe de h selon x .
3. Montrer que h est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $h'(x) = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$.
4. En déduire les variations de h .
5. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $e^{-x^4} \ln x \leq h(x) \leq e^{-x^2} \ln x$ (on séparera les cas $x < 1$ et $x > 1$).
6. En déduire les limites de h en 0 et $+\infty$.

Exercice 19:

Soit la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D}_F de F .
2. Montrer que la fonction F est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
3. Etudier la limite de F en $+\infty$.
4. ** A l'aide d'un changement de variable, établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$.

Exercice 20:

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

a) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}$ b) $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ c) $w_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{1/n}$

Exercice 21: Prendre des initiatives!

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction u définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{u(x)} e^{t^2} dt = x$.
3. Etudier les variations de u ainsi que sa dérivabilité.

Exercice 22: **

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

