Polynômes

1. Calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. (*)
On définit les polynômes :

$$P(X) = X^2 + 2X, \quad Q(X) = X^2 - X - 1, \quad R(X) = X^3 - 4X$$

Calculer les polynômes : $P(X)^2$, $(P-Q)(X)$, $(3P+Q-R)(X)$, $(P^2-Q^2)(X)$, $(P\circ Q)(X)$, $(Q\circ P)(X)$.

Exercice 2. (**)
Déterminer les degrés, les coefficients dominants et les coefficients de plus bas degré des polynôme suivantes :

1) $P(X) = X^3 - X(X-2+i)^2$
2) $P(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2X-k)$
3) $P(X) = (X-2)^n - (X+5)^n$
4) $P(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-6)^k$

Exercice 3. (**)
Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une forme développée du polynôme

$$P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n}).$$

Indication : on pourra calculer $(1-X)P(X)$.

Exercice 4. (***) - Raisonnement à retenir
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n par

$$\begin{cases} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 2-X \\ P_{n+1} &= 2(2n+1)P_n + X^2P_{n-1}, \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que : $P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.

Exercice 5. (**) - Polynôme et équation
Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnue $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,
2. $P\circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 6. (**) - Lien avec la combinatoire

Soit un entier $n \geq 1$. En utilisant la dérivée du polynôme $(X+1)^n$, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Exercice 7. (**) - Exercice classique

Soit $P = (X-a)^n$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $n > 0$. Calculer $P^{(k)}$ pour $k > 0$.

Exercice 8. (**) - Polynôme et équation V2

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $X^2P'' - 3XP' + 3P = 0$.

2. Division euclidienne et divisibilité

Exercice 9. (*)

Effectuer dans chaque cas, la division euclidienne de A par B.

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$.
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$.
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$.
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$.

Exercice 10. (*)

Montrer les divisibilités suivantes et déterminer le quotient associé.

1. $X - 1 | X^3 - 2X^2 + 3X - 2$
2. $X - 2 | X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
3. $X + 1 | X^3 + 3X^2 - 2$.

Exercice 11. (*) - Méthode à retenir

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 12. (***)

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos(t) + \sin(t))^n$ par (X^2+1).

Exercice 13. (*)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que
$X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 14. (***)

Montrer que pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(X) - X | P(P(X)) - X$.
Indication : On pourra d'abord remarquer que ce problème à équivalent à montrer que
$P(X) - X | P(P(x)) - P(X)$.

3. Polynômes et racines

Exercice 15. (*) - A retenir
Justifier les divisibilités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ X^2 | (X+1)^n - nX - 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^3 | nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 16. (**)
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que

$$X^2 + X + 1 | X^{2n} + X^n + 1.$$

Exercice 17. (*) - Résultat à retenir
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

1. Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi.
2. En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Exercice 18. (**) - Polynôme et équation V3
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X-1)P(X).$$

4. Factorisation

Exercice 19. (**)
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1. $X^4 - 1$
2. $X^5 - 1$
3. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 20. (**)
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1. $X^4 + X^2 + 1$
2. $X^4 + X^2 - 6$

Exercice 21. (***)
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $(X+i)^n - (X-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Fin