Calcul Matriciel

Systèmes Linéaires

Exercice 1. (*)

Calculer les produits LC et CL, avec $L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$ et $T = (A+B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Exercice 3. (*)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer AB, ${}^tA, {}^tB$ et ${}^tB{}^tA$. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

Exercice 4. (**)

Pour les matrices suivantes, calculer lorsque c'est possible le produit AB et le produit BA

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B =^t A$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A$.

Exercice 5. (*)

Pour les matrices suivantes, calculer les produits AB et BA. Conclusion ?

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. (**)

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer lorsque cela est possible les produits matriciels : AB, BA, AC, CA, BC et CB.

Exercice 7. (**)

1. Déterminer les matrices carrées de taille 3 qui commutent avec $\operatorname{diag}(1, 2, 3)$.
2. Soient α et β deux réels tels que $\alpha \neq \beta$. Déterminer les matrices carrées de taille 3 qui commutent avec $diag(\alpha, \alpha, \beta)$.
3. Déterminer les matrices (carrées de taille n) qui commutent avec $\operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$.

Exercice 8. (*) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, puis $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.
2. Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. - Un peu de théorie sur les opérations matricielles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

1. Montrer que les coefficients de $A+B$ sont tous positifs ou nuls.
2. Montrer que les coefficients de AB sont tous positifs ou nuls.
3. Montrer que les coefficients de ${}^tA{}^tB$ sont tous positifs ou nuls.
4. Montrer que les coefficients de λA sont tous positifs ou nuls si $\lambda > 0$.

2. Calculs de puissances

Exercice 10. (**) Puissance de matrice, méthode 1

Objectif : calculer les premières puissances d'une matrice en conjecturant une formule à l'aide des premières puissances.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les premières puissances de A (à partir de 2) et en déduire une conjecture pour l'expression de A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 11. (**)

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. (**) Puissances d'une matrice : méthode 2

Objectif : calculer les puissances de la somme d'une matrice nilpotente et d'une homothétie.

1. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = T - \mathrm{I}_3$ (on a donc $T = \mathrm{I}_3 + N$).
   (a) Calculer N^k pour tout entier naturel k.
   (b) En déduire T^k à l'aide de la formule du binôme de Newton, dont on justifiera l'emploi.
2. Reprendre la méthode précédente pour calculer U^k pour tout entier naturel k, avec $U = 2\mathrm{I}_3 + N$.
3. Reprendre la méthode précédente pour calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 13. (**)

Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver l'expression de B^n pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.
Vérifier que cette formule est également valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. (**)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'expression : $(I_n - A)\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ deux matrices qui commutent, simplifier $(A - B)\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$.

Exercice 15. (**)
Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer B en fonction de A et I_2.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. (**)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression de A^n en fonction de n.

3. Inverses de matrices

Exercice 17. (*)
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leurs inverses :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. (**)
Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. (**)
Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 20. (**)
Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 21. (**)

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice A_m est inversible et calculer A_m^{-1} pour ces valeurs, où A_m est donnée par
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. (***)

Calculer l'inverse de la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. (***)

Soit la matrice $B = (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$ c.a.d. la matrice :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tMM$.
2. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 24. (**) Méthode : Polynôme et inverse

Objectif : montrer qu'une matrice est inversible ou non à l'aide d'un polynôme de matrices.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^3 - A^2 - A$.
   (b) Déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - 3B^2 + 2B$. Déduire que B n'est pas inversible.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Calculer $(A - 2I_4)^2$. $A - 2I_4$ est-elle inversible ?
   Développer $(A - 2I_4)^2$ puis montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 25. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$.

1. Montrer que A est inversible et donner son inverse.
2. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 26. (**)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $A^n = a_n A + b_n I_2$. Montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
3. En déduire la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 27. (**)

Soient α , β et γ trois réels. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $C^3 - \gamma C^2 - \beta C - \alpha I_3 = 0_3$.
2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, alors C est inversible. Donner son inverse.
3. Montrer que si $\alpha = 0$ alors C n'est pas inversible.

4. Quelques applications classiques

Exercice 28. (**) Etude des matrices nilpotentes Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

1. Donner des exemples de telles matrices.
2. Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut pas être inversible.
3. On suppose que N et M sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $N + M$ et NM sont nilpotentes. Le résultat est-il vrai si les matrices ne commutent pas ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 29. (**) Introduction à la diagonalisation et application aux suites

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit QP.
2. Vérifier que $A = \frac{1}{2}PDQ$, puis montrer que : "$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{2}PD^nQ$" et expliciter A^n.
3. On considère trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) telles que

   $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{array} \right.$ On introduit la matrice $X_n = {}^t(a_n, b_n, c_n)$

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

   (b) En déduire l'expression des suites (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction de n.

Exercice 30. (**) Introduction à la diagonalisation et application aux suites

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible en calculant son inverse P^{-1}.
2. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer A en fonction de D, P, P^{-1}, puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
4. En déduire une expression de A^n en fonction de n.
5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la donnée de leurs premiers termes, respectivement x_0, y_0 et z_0, et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

et on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre X_{n+1}, X_n et A.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de A, n et X_0.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.