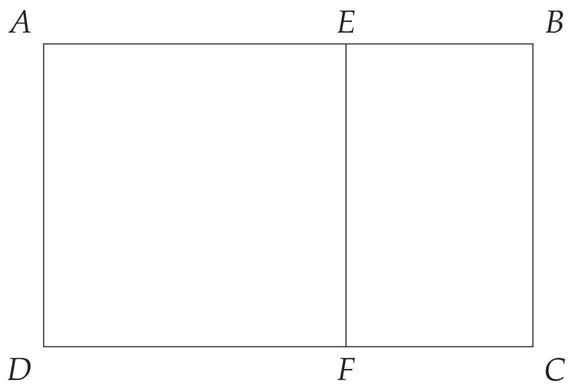
Devoir Maison

Récurrences

Pour le Jeudi 27 Septembre 2018



On dit que le rectangle $ABCD$ est *harmonieux* si en traçant le carré $AEFD$, les rapports $\dfrac{AB}{AD}$ et $\dfrac{EF}{EB}$ sont égaux.
On note φ ce rapport.

Problème.

1. Calculer le rapport φ et remarquer que celui-ci ne dépend pas des dimensions du rectangle $ABCD$.

2. On se propose de montrer que $\varphi \notin \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que φ est irrationnel.

a. On suppose que l'on peut écrire $\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$ de manière irréductible. En remarquant que $5q^2 = p^2$, montrer que 5 divise p.

b. En déduire que 5 divise q.

c. Montrer que $\sqrt{5} \notin Q$ puis que $\varphi \notin \mathbb{Q}$.

3. On cherche à approximer φ.

a. Étudier la fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 - x - 1$.

b. On pose $u_0 = \frac{3}{2}$ et on définit la suite (u_n) par récurrence par $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{1+u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \varphi$

c. Montrer que (u_n) est croissante.

d. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. On définit $p_0 = 3$ et $q_0 = 2$ puis par récurrence $p_{n+1} = 2p_n + q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_{n+1} = 3p_n - p_{n-1}$ et $q_{n+1} = 3q_n - q_{n-1}$.

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = 1$.

d. Montrer que la fraction $\dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

e. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.