Préparation Concours Blanc N°2

Mathématiques & Informatique

Jeudi 14 Mars 2019

Durée : 2 heures

5. Soit $a \in]0,1[$.

(a) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\right) - \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\right)$$

et :

$$0 \leqslant \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

(b) Etablir que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ en fonction de Ψ et de a.

PROBLEME

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0, 1]$).

   (a) Ecrire une fonction DUEL en Turbo-Pascal qui créé un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\dfrac{1}{2}$ et 0 sinon.

   (b) Ecrire une fonction TEST_VICTOIRE en Turbo-Pascal qui, à trois nombres a, b, c fournis par l'utilisateur, renvoie TRUE si les trois sont égaux, FALSE sinon.

   (c) Ecrire un programme TOURNOI en Turbo-Pascal simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives). **Indication** : *Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions DUEL et TEST_VICTOIRE en les répètant convenablement jusqu'à ce que TEST_VICTOIRE sur trois DUEL consécutifs renvoie TRUE.*

2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

   numéro
   du joueur
   gagnant
   le duel
   ↓

duel 1	0	...
duel 2	0	...
duel 3	0	...

   Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

PARTIE II : Etude du cas général.

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0,1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, .., N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ».

   Justifier l'égalité :

$$\forall n \geqslant N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Etablir que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), .., P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geqslant N$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

   On note désormais r_N cette solution. Justifier que :
$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ (*question* **II**.2), établir que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ (*question* **II**.4) sur tous les entiers $n \geqslant N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

   (a) Soit $n \geqslant 2$. Justifier que les événements $\left(E_{n-1} \cap \overline{E_n}\right)$ et $(X = n)$ sont égaux.

   (b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie **II** sont conservées. Les résultats de la question **II.5**) pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :
$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$$
   et on admet que :
$$(qX - 1)\,Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N.$$
   Soit z un complexe tel que
$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine complexe de Q est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N-1$ complexes non nuls et distincts $z_1, .., z_{N-1}$ tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \cdots (Z - z_{N-1}).$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \to & \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto & \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), .., S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right) \right) \end{array} \right.$$

où $z_1, .., z_{N-1}$ sont les $N-1$ racines distinctes de Q.

   (a) Prouver que f est un isomorphisme.

   (b) Ecrire sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$. Expliciter ${}^tA$ (*la transposée de* A).

   (c) En déduire que le système :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{c} x_1 + \cdots + x_{N-1} = P(E_1) \\ \dfrac{x_1}{z_1} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{z_{N-1}} = P(E_2) \\ \vdots \\ \dfrac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} = P(E_{N-1}) \end{array} \right.$$

   admet une unique solution $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$.

3. Soient $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$ l'unique solution du système $(\mathcal{S})$ (cf. question **III.2c)**, on considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$