Devoir Sur Table N°10

Probabilités

Mercredi 20 Mars 2019

Durée : 2 heures

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.
On note A_1 l'événement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 l'événement : « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».
On note $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A.
On rappelle que la notation $P_A(B)$ désigne la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A l'est.

(1) Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\dfrac{1}{19}$.

(2) **(a)** Calculer directement la probabilité conditionnelle $P_{A_1}(A_2)$ que A_2 soit réalisé sachant que A_1 l'est.

(b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\dfrac{1}{323}$.

(3) **(a)** Calculer la probabilité $P_{\overline{A_1}}(A_2)$.

(b) En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$, calculer la probabilité $P(A_2)$ puis en déduire que $P(A_2 \cup A_1) = \dfrac{33}{323}$.

(4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.

(a) Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes : une urne U_1 contenant quatre boules blanches et une boule noire, et une urne U_2 contenant quatre boules noires et une boule blanche.

Partie I

Une épreuve consiste à lancer deux dés équilibrés à six faces, puis si la somme des faces obtenues est $3, 7$ ou 9, on tire une boule de l'urne U_1, sinon on tire une boule de l'urne U_2. Une fois la couleur notée, la boule est ensuite remise dans l'urne.
On répète n fois l'épreuve décrite ci-dessus : avant chaque tirage, le choix de l'urne dépend donc du résultat du lancer des deux dés et la boule tirée au k^{e} tirage est remise dans l'urne avant de procéder au $k+1^{\text{e}}$ tirage.
On s'intéresse à la probabilité de tirer une boule blanche au n^{e} tirage et exactement deux boules blanches au cours des $n-1$ tirages précédents. On note p_n cette probabilité.

On note, pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$,
— B_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule blanche »
— U_k l'événement « au cours des $k-1$ premiers tirages, deux boules blanches exactement ont été tirées. »

(1) Calculer la probabilité $P(B_n)$.

(2) Calculer p_3 et p_4.

(3) Calcul de p_n

(a) Soit p un entier tel que $p \geq 2$ et c_p le coefficient binômial $c_p = \binom{p}{2}$. Montrer que $c_p = c_{p-1} + p - 1$ et en déduire l'expression de c_p en fonction de p.

(b) Calculer la probabilité $P(U_n)$.

(c) En déduire p_n.

Partie II

Dans cette partie, on procède à n tirages avec remise mais cette fois, le choix de l'urne se fait au hasard avant chaque nouveau tirage. Les urnes U_1 et U_2 sont les mêmes qu'à la partie précédente.
On s'intéresse à la probabilité q_n qu'au cours des n tirages, une boule blanche n'a pas été tirée trois fois de suite.

On note, pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$,
— B_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule blanche, »
— N_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule noire, et »
— V_n l'événement « au cours des n tirages, trois boules blanches à la suite n'ont pas été tirées. »

(1) Calculer q_1, q_2, q_3 et q_4.

(2) Relation de récurrence pour le calcul de q_n.

(a) Etablir l'égalité $V_n = [V_n \cap N_1] \cup [V_n \cap B_1 \cap N_2] \cup [V_n \cap B_1 \cap B_2 \cap N_3]$

(b) En déduire une relation de récurrence entre q_n, q_{n-1}, q_{n-2} et q_{n-3}.

(c) Vérifier cette relation pour $n = 4$.

Le web est constitué de milliards de pages et des liens qui les relient. On considère, dans cet exercice, un minuscule réseau constitué de trois pages, notées A, B et C avec :

— deux liens sur la page A, l'un pointant vers la page B et l'autre vers la page C,

— deux liens sur la page B, l'un pointant vers la page A, l'autre vers la page C,

— et enfin quatre liens sur la page C, un pointant vers la page A, un pointant vers la page B et deux liens pointant sur la page C.

Un promeneur impartial navigue sur ce réseau en cliquant sur les liens qui lui sont offerts.
Il est initialement (à l'instant $t = 0$) sur la page A. Il peut ensuite soit cliquer sur le lien pointant vers B, soit sur le lien pointant vers C pour se trouver, à l'instant d'après (instant $t = 1$), soit sur la page B, soit sur la page C.
Il poursuit ensuite sa promenade de la manière suivante : si à un instant $t = n$, il se trouve sur une page A, B ou C, il clique alors sur l'un des liens présents sur cette page, pour se retrouver à l'instant $t = n + 1$, sur la page correspondante au lien cliqué.
Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

— A_n : « à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page A »

— B_n : « à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page B »

— C_n : « à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page C »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n et on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On rappelle, au besoin, la formule des probabilités totales suivantes : si les événements $E_1, E_2, \ldots, E_m$ forment un système complet d'événements alors

$$P(F) = \sum_{i=1}^{m} P_{E_i}(F)P(E_i)$$

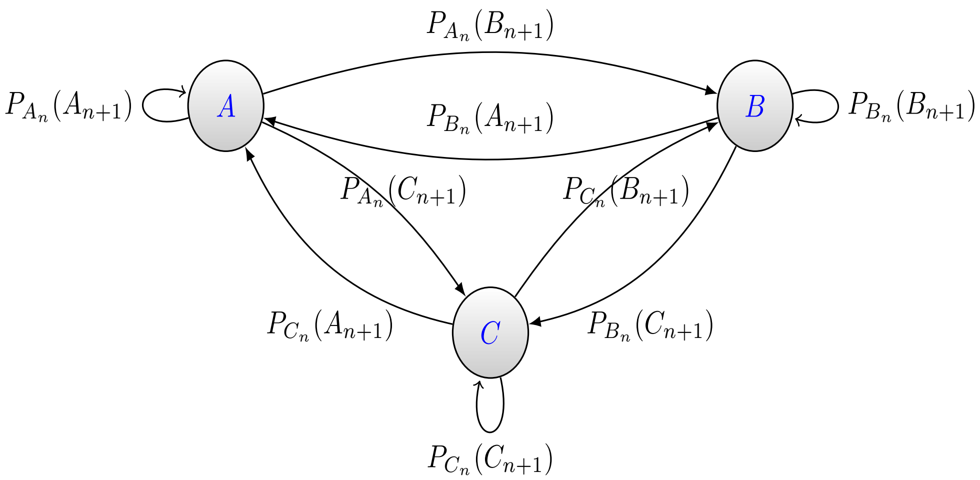
où F est un événement quelconque.

(1) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

(2) Pour tout entier n, déterminer, en justifiant, la valeur de $a_n + b_n + c_n$?

(3) **(a)** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n + \dfrac{1}{4} c_n$.

(b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles figurant sur le schéma ci-dessous. On représentera les résultats en reproduisant sur la copie et en complétant le schéma ci-dessous (indiquer les valeurs des probabilités conditionnelles figurant sur le scéma)



(c) Déterminer une relation entre b_{n+1}, a_n, c_n d'une part, et entre c_{n+1}, a_n, b_n et c_n d'autre part.

(4) Donner pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de $c_n = P(C_n)$.

(5) Déterminer alors une matrice M telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$. Exprimer alors U_n enfonction de M, U_0 et n.

(6) **(a)** Calculer M^2 et M^3 puis déterminer une relation entre M^3, M^2 et M. On déterminera des réels a, b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels u_n et v_n tels que $M^n = u_n M^2 + v_n M$.

(c) Donner les relations entre u_{n+1}, u_n, v_n d'une part, et entre v_{n+1}, u_n, v_n d'autre part.

(d) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante et en déduire une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

(e) On pose $w_n = u_n - \dfrac{2}{3}$. Montrer que la suite (w_n) est géométrique, puis déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

(6) En déduire les probabilités a_n et b_n, pour tout entier $n \geq 1$.