Exercice 1

Corrigé

(1) Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\frac{1}{19}$.

Pour le premier candidat, il y a 20 sujets possibles au premier tirage et 19 sujets possibles au second tirage, ce qui fait 20×19 cas possibles. Parmi tous ces cas, il y a 20 cas favorables où les deux sujets proviennent du même examinateur. On a donc

$$P(A_1) = \frac{20}{20 \times 19} = \frac{1}{19}.$$

(2) **(a)** Calculer directement la probabilité conditionnelle $P_{A_1}(A_2)$ que A_2 soit réalisé sachant que A_1 l'est.

Puisque A_1 est supposé réalisé, il reste pour le second candidat, 18 sujets possibles pour son premier tirage et 17 pour son second tirage, ce qui lui fait en tout 18×17 cas possibles.

Comme le premier candidat a obtenu deux sujets du même examinateur (on sait que A_1 est réalisé), il ne reste plus que 18 cas favorables à A_2 donc

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{18}{18 \times 17} = \frac{1}{17}.$$

(b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.

Il s'agit de calculer ici la probabilité de $A_1 \cap A_2$. Or, on dispose de la formule (des probabilités conditionnelles) :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$$

qui fournit donc

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{19} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{323}.$$

(3) **(a)** Calculer la probabilité $P_{\overline{A_1}}(A_2)$.

Pour le calcul de cette probabilité, on suppose donc que A_1 n'est pas réalisé.

Il y a donc pour le second candidat, 18×17 cas possibles et parmi ces cas, il reste 16 cas favorables à A_2 où les deux sujets proviennent du même examinateur. On a donc

$$P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{16}{18 \times 17}.$$

(b) En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$, calculer la probabilité $P(A_2)$ puis en déduire que $P(A_2 \cup A_1) = \frac{33}{323}$.

D'une part, $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$, et d'autre part, les événements $A_2 \cap A_1$ et $A_2 \cap \overline{A_1}$ sont incompatibles donc

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A_1})$$

et avec la formule des probabilités conditionnelles, on obtient

$$P(A_2) = \frac{1}{323} + P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{323} + \frac{18}{19} \times \frac{16}{18 \times 17} = \frac{17}{323} = \frac{1}{19}.$$

Par suite,

$$P(A_2 \cup A_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{19} - \frac{1}{323} = \frac{33}{323}.$$

(4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.

(a) Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire X.

$$P(X=0) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - \frac{33}{323} = \frac{290}{323}$$
$$P(X=1) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{19} - \frac{1}{323} + \frac{16}{323} = \frac{32}{323}$$
$$P(X=2) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{323}$$

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

On trouve

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = \frac{34}{323} = \frac{2}{19}$$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On dispose de deux urnes : une urne U_1 contenant quatre boules blanches et une boule noire, et une urne U_2 contenant quatre boules noires et une boule blanche.

Partie I

Une épreuve consiste à lancer deux dés équilibrés à six faces, puis si la somme des faces obtenues est $3, 7$ ou 9, on tire une boule de l'urne U_1, sinon on tire une boule de l'urne U_2. Une fois la couleur notée, la boule est ensuite remise dans l'urne.

On répète n fois l'épreuve décrite ci-dessus : avant chaque tirage, le choix de l'urne dépend donc du résultat du lancer des deux dés et la boule tirée au k^{e} tirage est remise dans l'urne avant de procéder au $k+1^{\text{e}}$ tirage.

On s'intéresse à la probabilité de tirer une boule blanche au n^{e} tirage et exactement deux boules blanches au cours des $n-1$ tirages précédents. On note p_n cette probabilité.

On note, pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$,

— B_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule blanche »

— U_k l'événement « au cours des $k-1$ premiers tirages, deux boules blanches exactement ont été tirées. »

(1) Calculer la probabilité $P(B_n)$.

Notons S_{379} l'événement : « la somme des faces obtenues est 3, 7 ou 9. »D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B_n) = P(S_{379})P_{S_{379}}(B_n) + P(\overline{S_{379}})P_{\overline{S_{379}}}(B_n).$$

Une étude simple donne $P(S_{379}) = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$, donc

$$P(B_n) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

(2) Calculer p_3 et p_4.

On a $p_3 = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ et par indépendance des épreuves,

$$p_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{25}.$$

Pour le calcul de p_4, on a $p_4 = P(N_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4) + P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap B_4)$ et par indépendance des épreuves,

$$p_4 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{3}{5} = \frac{72}{625}.$$

(3) Calcul de p_n

(a) Soit p un entier tel que $p \geq 2$ et c_p le coefficient binômial $c_p = \binom{p}{2}$. Montrer que $c_p = c_{p-1} + p - 1$ et en déduire l'expression de c_p en fonction de p.

D'après la formule de Pascal,

$$c_p = \binom{p}{2} = \binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{1} = c_{p-1} + (p-1)$$

donc

$$c_p = (p-1) + (p-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{p(p-1)}{2}.$$

(b) Calculer la probabilité $P(U_n)$.

L'expérience consiste à répéter n fois de manière indépendante l'épreuve qui consiste à lancer les dés puis tirer une boule de l'urne. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches tirées au cours des $n-1$ premières épreuves.

La variable aléatoire X suit une loi binômiale de paramètres n et $\frac{2}{5}$. On a donc

$$P(U_n) = P(X=2) = \binom{n-1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-3} = \frac{2(n-1)(n-2)3^{n-3}}{5^n}$$

(c) En déduire p_n.

On a $p_n = P(U_n \cap B_n)$ et puisque les événements U_n et B_n sont indépendants, on a

$$\begin{aligned} p_n = P(U_n) \times P(B_n) &= \frac{2}{5} \times \frac{2(n-1)(n-2)3^{n-3}}{5^n} \\ &= \frac{4(n-1)(n-2)3^{n-3}}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

Partie II

Dans cette partie, on procède à n tirages avec remise mais cette fois, le choix de l'urne se fait au hasard avant chaque nouveau tirage. Les urnes U_1 et U_2 sont les mêmes qu'à la partie précédente.

On s'intéresse à la probabilité q_n qu'au cours des n tirages, une boule blanche n'a pas été tirée trois fois de suite.

On note, pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$,

— B_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule blanche, »

— N_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule noire, et »

— V_n l'événement « au cours des n tirages, trois boules blanches à la suite n'ont pas été tirées. »

(1) Calculer q_1, q_2, q_3 et q_4.

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de tirer une boule blanche au k^{e} tirage est

$$P(B_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2}.$$

Clairement $q_1 = q_2 = 1$, puis $q_3 = P(\overline{B_1 \cap B_2 \cap B_3}) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ et puisque les épreuves sont indépendantes :

$$q_3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}.$$

Pour le calcul de q_4, on a $1 - q_4 = P(B_1B_2B_3N_4) + P(N_1B_2B_3B_4) + P(B_1B_2B_3B_4) =$ et par indépendance des épreuves,

$$q_4 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

(2) Relation de récurrence pour le calcul de q_n.

(a) Etablir l'égalité $V_n = [V_n \cap N_1] \cup [V_n \cap B_1 \cap N_2] \cup [V_n \cap B_1 \cap B_2 \cap N_3]$

Si V_n est réalisé alors les trois premières boules ne sont pas blanches donc l'un des événements $N_1, B_1 \cap N_2$ ou $B_1 \cap B_2 \cap N_3$ est réalisé ce qui donne

$$V_n \subset N_1 \cup [B_1 \cap N_2] \cup [B_1 \cap B_2 \cap N_3]$$

donc

$$V_n = (N_1 \cup [B_1 \cap N_2] \cup [B_1 \cap B_2 \cap N_3]) \cap V_n$$

donc

$$V_n = [V_n \cap N_1] \cup [V_n \cap B_1 \cap N_2] \cup [V_n \cap B_1 \cap B_2 \cap N_3].$$

(b) En déduire une relation de récurrence entre q_n, q_{n-1}, q_{n-2} et q_{n-3}.

Les événements $[V_n \cap N_1]$, $[V_n \cap B_1 \cap N_2]$, $[V_n \cap B_1 \cap B_2 \cap N_3]$ sont incompatibles. D'après la réponse précèdente, on a

$$q_n = P(V_n \cap N_1) + P(V_n \cap B_1 \cap N_2) + P(V_n \cap B_1 \cap B_2 \cap N_3)$$

et d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$q_n = P_{N_1}(V_n)P(N_1) + P_{B_1 \cap N_2}(V_n)P(B_1 \cap N_2) + P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(V_n)P(B_1 \cap B_2 \cap N_3).$$

Puisque les épreuves sont indépendantes,

$$P_{N_1}(V_n) = q_{n-1},\ P_{B_1 \cap N_2}(V_n) = q_{n-2},\ P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(V_n) = q_{n-3}$$

et

$$P(N_1) = \frac{1}{2},\ P(B_1 \cap N_2) = \frac{1}{4},\ P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{1}{8},$$

donc

$$q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2} + \frac{1}{8}q_{n-3}$$

(c) Vérifier cette relation pour $n = 4$.

$$\frac{1}{8}q_1 + \frac{1}{4}q_2 + \frac{1}{2}q_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{7}{16} = \frac{2+4+7}{16} = \frac{13}{16} = q_4.$$

Exercice 3

Le web est constitué de milliards de pages et des liens qui les relient. On considère, dans cet exercice, un minuscule réseau constitué de trois pages, notées A, B et C avec :

— deux liens sur la page A, l'un pointant vers la page B et l'autre vers la page C,

— deux liens sur la page B, l'un pointant vers la page A, l'autre vers la page C,

— et enfin quatre liens sur la page C, un pointant vers la page A, un pointant vers la page B et deux liens pointant sur la page C.

Un promeneur impartial navigue sur ce réseau en cliquant sur les liens qui lui sont offerts.

Il est initialement (à l'instant $t = 0$) sur la page A. Il peut ensuite soit cliquer sur le lien pointant vers B, soit sur le lien pointant vers C pour se trouver, à l'instant d'après (instant $t = 1$), soit sur la page B, soit sur la page C.

Il poursuit ensuite sa promenade de la manière suivante : si à un instant $t = n$, il se trouve sur une page A, B ou C, il clique alors sur l'un des liens présents sur cette page, pour se retrouver à l'instant $t = n + 1$, sur la page correspondante au lien cliqué.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

— A_n : « à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page A »

— B_n : « à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page B »

— C_n : « à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page C »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n et on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On rappelle, au besoin, la formule des probabilités totales suivantes : si les événements $E_1, E_2, \ldots, E_m$ forment un système complet d'événements alors

$$P(F) = \sum_{i=1}^{m} P_{E_i}(F)P(E_i)$$

où F est un événement quelconque.

(1) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

On a $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$ d'après les conditions initiales.

(2) Pour tout entier n, déterminer, en justifiant, la valeur de $a_n + b_n + c_n$?

A chaque instant, le promeneur est soit sur la page A, soit sur la page B, soit sur la page C. Pour tout entier naturel n, les événements A_n, B_n, C_n forment donc un système complet d'événements ce qui entraîne $a_n + b_n + c_n = 1$.

(3) **(a)** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements,

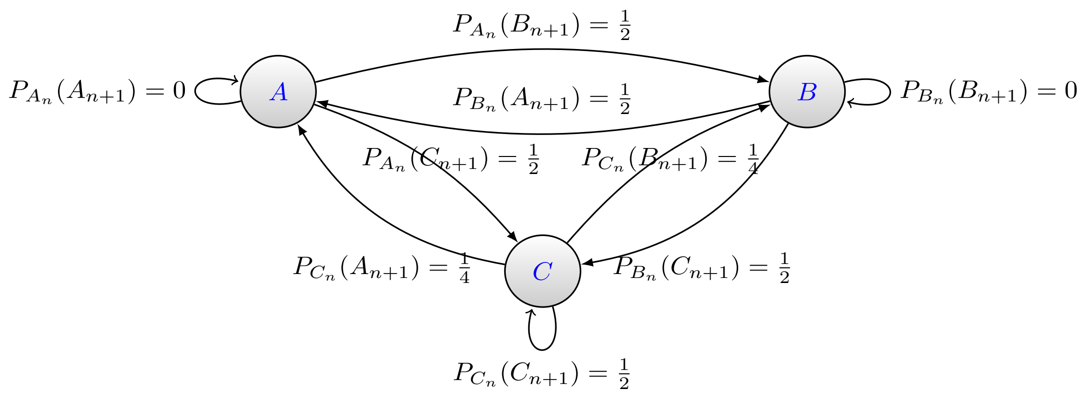
$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n).$$

Or $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,\ P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ donc

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n.$$

(b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles figurant sur le schéma ci-dessous. On représentera les résultats en reproduisant sur la copie et en complétant le schéma ci-dessous (indiquer les valeurs des probabilités conditionnelles figurant sur le scéma)

1



(c) Déterminer une relation entre b_{n+1}, a_n, c_n d'une part, et entre c_{n+1}, a_n, b_n et c_n d'autre part.
En écrivant la formule des probabilités totales pour B_{n+1} et C_{n+1} avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), on obtient :

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

(4) Donner pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de $c_n = P(C_n)$.
D'après la question (2), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n = 1$ donc

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $c_n = \dfrac{1}{2}$.

(5) Déterminer alors une matrice M telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$. Exprimer alors U_n enfonction de M, U_0 et n.
Le système des relations

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

se traduit matriciellement en $U_{n+1} = MU_n$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(6) **(a)** Calculer M^2 et M^3 puis déterminer une relation entre M^3, M^2 et M. On déterminera des réels a, b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.
On trouve $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On observe alors que $M^3 = \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe des réels u_n et v_n tels que $M^n = u_n M^2 + v_n M$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « il existe des réels u_n et v_n tels que $M^n = u_n M^2 + v_n M$ »
— La relation est vraie pour $n = 1$ avec $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$. La relation est vraie pour $n = 2$ avec $u_2 = 1$ et $v_2 = 0$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
De $M^n = u_n M^2 + v_n M$, on a $M^{n+1} = u_n M^3 + v_n M^2$ et avec $M^3 = \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M$, on obtient

$$M^{n+1} = (\frac{1}{2}u_n + v_n)M^2 + (\frac{1}{2}v_n)M$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie avec $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.
Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels u_n et v_n tels que $M^n = u_n M^2 + v_n M$.

(c) Donner les relations entre u_{n+1}, u_n, v_n d'une part, et entre v_{n+1}, u_n, v_n d'autre part.
D'après la question précédente, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n.$$

(d) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante et en déduire une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

D'après les relations précédentes, on remarque que $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 1$ et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1.$$

(e) On pose $w_n = u_n - \dfrac{2}{3}$. Montrer que la suite (w_n) est géométrique, puis déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 1 - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}w_n \end{aligned}$$

donc la suite (w_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $w_1 = u_1 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = w_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(6) En déduire les probabilités a_n et b_n, pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc U_n est égal à la première colonne de M^n :

$$U_n = u_n \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où on tire

$$a_n = \frac{3}{8}u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{8}u_n + \frac{1}{2}v_n = \frac{1}{12}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$