Partie I

1. (a)

```
FUNCTION DUEL : INTEGER ;
    BEGIN
        IF random < 1/2
            THEN DUEL:=1
            ELSE DUEL:=0 ;
    END ;
```

(b)

```
FUNCTION TEST_VICTOIRE(a,b,c : INTEGER) : BOOLEAN ;
    BEGIN
        TEST_VICTOIRE := ((a=b)AND(b=c)) ;
    END ;
```

(c)

```
PROGRAM TOURNOI ;
VAR a,b,c,n : INTEGER ;
FUNCTION DUEL : INTEGER ;
    BEGIN IF random < 1/2 THEN DUEL:=1 ELSE DUEL:=0 ; END;
FUNCTION TEST_VICTOIRE(a,b,c : INTEGER) : BOOLEAN ;
    BEGIN TEST_VICTOIRE := ((a=b)AND(b=c)) ; END ;
BEGIN
    RANDOMIZE;
    a:= DUEL ;
    b:= a+DUEL ;
    c:= b+DUEL ;
    n:=3;
    WHILE TEST_VICTOIRE(a,b,c) <> TRUE
        DO
        BEGIN
        a:=b ; b:=c ; c:=c+DUEL ; n := n+1 ;
        END ;
    WRITELN('Le nombre de duels nécessaires a été de : ',n) ;
END.
```

2. Liste des gagnants possibles :

duel 1	0	1		
duel 2	0	1	2	
duel 3	0	1	2	3

E_1 et E_2 sont des événements certains. En effet, le premier "gagnant du tournoi" possible ne peut être désigné au minimum qu'à l'issue du duel 3. On a donc :

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1}$$

De plus, l'événement E_3 a pour événement contraire $\overline{E_3}$ correspond au fait que le joueur 0 ou le joueur 1 gagne les trois premiers tournois. En notant O_k "le joueur A_0 gagne le duel k" et I_k "le joueur A_1 gagne le duel k", on a donc :

$$\begin{aligned}P(E_3) &= 1-P(\overline{E_3}) = 1-P(O_1\cap O_2\cap O_3)-P(I_1\cap I_2\cap I_3)\\ &= 1-P(O_1)P_{O_1}(O_2)P_{O_1\cap O_2}(O_3)-P(I_1)P_{I_1}(I_2)P_{I_1\cap I_2}(I_3) = 1-2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Remarquons qu'on a :

$$\frac{1}{2}P(E_2)+\frac{1}{4}P(E_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=P(E_3)$$

3. Soit $n \geqslant 3$. Notons G_n l'événement "il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n est le joueur A_n (et marque donc au duel n sa première victoire)". Notons H_n l'événement "il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n est le joueur A_{n-1} (et marque donc au duel n sa seconde victoire)".
Alors $E_n = G_n \cup H_n$ avec $G_n \cap H_n = \emptyset$. D'où : $P(E_n)=P(G_n)+P(H_n)$.
De plus, $G_n = E_{n-1}\cap T_n$ où T_n : "le joueur A_n gagne le duel n".
Ainsi : $P(G_n)=P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(T_n)=\frac{1}{2}P(E_{n-1})$.
De même, $H_n = E_{n-2}\cap U_{n-1}\cap U_n$ où U_k : "le joueur A_{n-1} gagne le duel k".
Ainsi : $P(H_n)=P(E_{n-2})P_{E_{n-2}}(U_{n-1})P_{E_{n-2}\cap U_{n-1}}(U_n)=\frac{1}{4}P(E_{n-2})$.
On a donc finalement :

$$\boxed{P(E_n)=\frac{1}{2}P(E_{n-1})+\frac{1}{4}P(E_{n-2})}$$

4. La suite $(P(E_n))_{n\geqslant 1}$ est donc récurrente linéaire double, et a pour équation caractéristique $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0 \iff 4x^2-2x-1=0$. L'équation admet deux solutions réelles qui sont $r_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Il existe donc deux constantes λ et μ telles que :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ P(E_n)=\lambda r_1^n+\mu r_2^n}$$

Puisque $2<\sqrt{5}<3$, on a $|r_1|<1$ et $|r_2|<1$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}P(E_n)=0}$$

5. Pour tout $n\geqslant 1$, si E_n est réalisé (le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n), alors le gagnant n'avait pas été désigné à l'issue des duels précédents, E_{n-1} est donc nécessairement réalisé. Ainsi :

$$\forall n\geqslant 1,\ E_n\subset E_{n-1}$$

La suite d'événements (E_n) étant décroissante, le Théorème de la Limite Monotone affirme que :

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty}E_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P(E_n)=0$$

L'événement "on ne désignera jamais de gagnant au tournoi" est ainsi négligeable. Son événement contraire, "le tournoi désignera un vainqueur", est alors presque-sûr, de probabilité 1.

Partie II

1. Soit $n \geqslant N$ et soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.
   Si on suppose que l'événement $A_k^{(n)}$ est réalisé, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ($k < N$), donc c'est exactement le joueur A_{n-k+1} qui a gagné les k derniers duels, et qui n'est pas gagnant du tournoi (puisque $k < N$). Le gagnant du tournoi a pu être désigné au préalable avant l'apparition de A_{n-k+1}, ou n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n.
   Le fait que le gagnant du tournoi n'ait pas été désigné à l'issue du n-ième duel revient donc au fait que le gagnant du tournoi n'ait pas été désigné avant les duels gagnés par A_{n-k+1}, donc autrement dit à l'issue du duel $n-k$. Ainsi, sachant $A_k^{(n)}$, E_n est réalisé si et seulement si E_{n-k} est réalisé.
   $$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k})$$
   Or, E_{n-k} est indépendant de $A_k^{(n)}$ puisque ne dépendant que des résultats des $n-k$ premiers duels, alors que $A_k^{(n)}$ dépend uniquement de l'issue des k derniers duels. Ainsi :
   $$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k})$$

2. Notons plus généralement $A_k^{(n)}$ l'événement "à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires" pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(E_n \cap A_k^{(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(E_n \cap A_k^{(n)}) \quad (\text{car si } k \geqslant N,\ E_n \cap A_k^{(n)} = \emptyset) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P(E_{n-k}) \end{aligned}$$
   Or, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, l'événement $A_k^{(n)}$ est réalisé si et seulement si le joueur A_{n-k+1} remporte ses k premiers duels. Il a une probabilité p de remporter le duel $n-k+1$, puis une probabilité q de remporter les $k-1$ suivants, donc $P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}$ et ainsi :
   $$\boxed{P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})}$$

3. Comme il est nécessaire d'avoir au moins N duels successifs pour que le gagnant du tournoi ait été désigné, le gagnant peut être désigné au plus tôt à l'issue du N-ième duel. Ainsi, $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ sont des événements certains. On a :
   $$P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_{N-1}) = 1$$
   On en déduit d'après la question précédente que :
   $$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} (q^{k-1} - q^k) = \boxed{1 - q^{N-1}}$$

4. Soit $n \geqslant N$. D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned}
P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k})) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-2} pq^{k}P(E_{n-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-1} pq^{k}P(E_{n-k}) + pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) \\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p(q^{k-1} - q^k)P(E_{n-k}) - pP(E_n) \\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p^2q^{k-1}P(E_{n-k}) - pP(E_n) \\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + p\left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - P(E_n)\right) \\
&= \boxed{pq^{N-1}P(E_{n-N+1})}
\end{aligned}$$

5. La fonction $x \mapsto Q(x)$ est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. De plus, on a : $\forall x > 0$, $Q'(x) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}kx^{k-1} > 0$. La fonction Q est donc continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[Q(0), \lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)[= [-1, +\infty[$. Puisque $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $Q(x) = 0$ admet donc bien une et une seule solution dans $[0, +\infty[$.

   Remarquons que $Q(1) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = p\frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1} < 0 = Q(r_N)$, donc par stricte croissance de Q sur $]0, +\infty[$, on a nécessairement $r_N > 1$.
   De plus, puisqu'on a établi que $\forall x > 1, Q'(x) > 0$, en particulier, $Q'(r_N) > 0$.

6. • Puisque $P(E_1) = 1$ et que $r_N > 1$, on a bien $r_N^{N-1} \geqslant 1$, donc : $P(E_1) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{1-N}$.
   • Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait montré que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(E_k) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{k-N}$. Alors, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) &\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} \\
&= \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}r_N^k = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}(Q(r_N)+1) = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}
\end{aligned}$$

   • Par récurrence forte, la propriété est bien vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

7. $r_N > 1$, donc $\left|\frac{1}{r_N}\right| < 1$. La série de terme général $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ est donc convergente (série géométrique). Par critère de comparaisons pour les séries à termes positifs, la série de terme général $P(E_n)$ converge également.

De plus, pour tout $K \geqslant N$, on a :

$$\sum_{n=N}^{K}(P(E_n) - P(E_{n+1})) = pq^{N-1}\sum_{n=N}^{K}P(E_{n-N+1})$$

autrement dit (somme télescopique),

$$P(E_N) - P(E_{N-K+1}) = pq^{N-1}\sum_{n=1}^{K-N+1}P(E_n)$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{K-N+1}P(E_n) = \frac{1}{pq^{N-1}}\left(P(E_N) - P(E_{K-N+1})\right)$$

Enfin, puisque la série de terme général $P(E_n)$ converge, on a nécessairement $\lim\limits_{K\to+\infty} P(E_{K-N+1}) = 0$, d'où :

$$\lim_{K\to+\infty}\sum_{n=1}^{K-N+1}P(E_n) = \frac{1}{pq^{N-1}}P(E_N) = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}P(E_n) = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

8. (a) Soit $n \geqslant 2$. L'événement $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ est réalisé si et seulement si le vainqueur du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du $(n-1)$-ième duel, mais l'est à l'issue du n-ième duel. Cet événement est donc réalisé si et seulement si le vainqueur est proclamé lors du duel numéro n, i.e. si et seulement si $[X = n]$ est réalisé. On a donc :

$$E_{n-1} \cap \overline{E_n} = [X = n]$$

(b) Pour tout $K \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{K}kP(X=k) &= \sum_{k=2}^{K}kP(X=k) \quad (\text{car } [X=1]=\emptyset)\\
&= \sum_{k=2}^{K}kP(E_{k-1}\cap\overline{E_k})\\
&= \sum_{k=2}^{K}k\left(P(E_{k-1}) - P(E_k)\right) \quad (\text{car } E_n \subset E_{n-1})\\
&= \sum_{k=2}^{K}kP(E_{k-1}) - \sum_{k=2}^{K}kP(E_k)\\
&= \sum_{k=1}^{K-1}(k+1)P(E_k) - \sum_{k=1}^{K}kP(E_k)\\
&= 2P(E_1) + \sum_{k=2}^{K-1}(k+1-k)P(E_k) - KP(E_K)\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{K-1}P(E_k) - KP(E_K)
\end{aligned}$$

Or, $\forall K \geqslant 1,\ 0 \leqslant KP(E_K) \leqslant \frac{K}{r_N^{K-N}} \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées), on en déduit donc que :

$$\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} kP(X=k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k)$$

La série de terme général $kP(X=k)$ converge donc (absolument), X admet bien une espérance et :

$$E(X) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) = \boxed{1 + \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

Partie III

1. Soit z un complexe tel que $Q(z) = 0$. On a alors :

$$R(z) = (qz-1)Q(z) = 0$$

De plus, en dérivant la relation $(qX-1)Q(X) = R(X)$, on obtient que $R'(X) = qQ(X) + (qX-1)Q'(X)$, d'où :

$$R'(z) = qQ(z) + (qz-1)Q'(z) = 0$$

Or, on sait que $R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$, donc $R'(X) = -1 + Npq^{N-1}X^{N-1}$.
Puisque $R'(z) = 0$, on a nécessairement $Npq^{N-1}z^{N-1} = 1$, d'où $z^{N-1} = \frac{1}{Npq^{N-1}}$. Enfin, $R(z) = 0$, donc :

$$1 - z + pq^{N-1}z^N = 0 \Longrightarrow z = 1 + pq^{N-1}z^{N-1}z = 1 + \frac{1}{N}z \Longrightarrow z\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 \Longrightarrow z = \frac{N}{N-1} \in [0, +\infty[$$

Or, Q admet une unique racine réelle positive qui est R_N, et qui ne vérifie pas $Q'(R_N) = 0$.
Cela contredit la définition de z. Ainsi, Q ne peut pas admettre de racine multiple (complexe ou réelle).

2. (a) • Soient S et T deux polynômes de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda S + T) &= \left((\lambda S + T)\left(\frac{1}{z_1}\right), \ldots, (\lambda S + T)\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \\ &= \lambda\left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), \ldots, S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) + \left(T\left(\frac{1}{z_1}\right), \ldots, T\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \\ &= \lambda f(S) + f(T) \end{aligned}$$

Donc f est bien une application linéaire.

• Soit $S \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(S) = 0$, i.e. $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ S\left(\frac{1}{z_k}\right) = 0$. Ainsi, le polynôme S est de degré au plus $N-2$, et admet au moins $N-1$ racines complexes distinctes. Il est donc nul. On a donc $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$. L'application S est donc injective, et puisque $\dim(\mathbb{C}_{N-2}[X]) = \dim(\mathbb{C}^{N-1}) = N-1$, l'application S est même bijective : c'est un isomorphisme.

(b) La matrice de A dans les bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_1^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \cdots & \frac{1}{z_2^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_3} & \frac{1}{z_3^2} & \cdots & \frac{1}{z_3^{N-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_{N-1}} & \frac{1}{z_{N-1}^2} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix}$$

et sa transposée est alors donnée par :

$$
{}^tA = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} & \cdots & \frac{1}{Z_{N-1}} \\
\frac{1}{z_1^2} & \frac{1}{z_2^2} & \frac{1}{z_3^2} & \cdots & \frac{1}{Z_{N-1}^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{z_1^{N-2}} & \frac{1}{z_2^{N-2}} & \frac{1}{z_3^{N-2}} & \cdots & \frac{1}{Z_{N-1}^{N-2}}
\end{pmatrix}
$$

(c) Puisque f est un isomorphisme, la matrice A est inversible. La matrice ${}^tA$ qui est de rang égal au rang de A, est également inversible. Pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$, il existe donc une unique matrice $X \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$ telle que ${}^tAX = Y$. En particulier, pour $Y = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}$, il existe un et un seul $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tAX = Y$, i.e. solution du système $(\mathcal{S})$ proposé.

3. Pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}u_{n-k} &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} z_j^k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} (Q(z_j)+1) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \\
&= u_n
\end{aligned}
$$

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(P(E_n))_{n\geqslant 1}$ coïncident sur $[\![1, N-1]\!]$ d'après 2(c), et vérifient la même relation de récurrence, donc sont égales. On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P(E_n) = u_n}$$