EL Borlia Sup
PTERAS ECS1
Prof. MAJOUN!

DEVOIR MAISON (WEEK-END)
PROBAS

Ce problème est composé de ***deux parties totalement indépendantes.***
On se propose de modéliser la participation d'une équipe à deux épreuves du jeu « Fort Boyard ».
Dans tout le problème, N désigne un entier naturel non nul.

Partie A.

Dans la première épreuve du jeu, une candidate est dans une salle où sont disposées $N+1$ jarres opaques numérotées de 0 à N. Pour $k \in [\![0;N]\!]$, la jarre numéro k contient k clés et $N-k$ scorpions.

L'équipe effectue N lancers indépendants d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité $p \in [0;1]$. La candidate pioche alors au hasard un objet dans la jarre dont le numéro correspond au nombre de « piles » obtenus.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de « piles » obtenus lors de ces N lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la cancidate pioche une clé, 0 sinon.

A1a. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
A1b. A l'aide de la formule de Koenig – Huygens, en déduire la valeur de $E(X^2)$.

A2a. A l'aide de l'énoncé, déterminer, en fonction de $k \in [\![0;N]\!]$ et de N, le nombre $P_{[X=k]}(Y=1)$.
A2b. En utilisant le système complet $([X=k])_{k\in[\![0;N]\!]}$, en déduire $P(Y=1)$ en fonction de $E(X)$ et de N.
A2c. Donner la loi de Y et son espérance.

A3. On admet que l'espérance de la variable aléatoire XY est donnée par

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k \cap Y=1).$$

A3a. En déduire que $E(XY) = \frac{E(X^2)}{N}$.
A3b. En déduire la quantité $E(XY) - E(X)E(Y)$ en fonction du paramètre p.

Partie B.

Dans la seconde épreuve, trois gobelets opaques sont disposés sur un tonneau servant de table de jeu. Deux petites clés sont cachées sous deux des gobelets. Le candidat effectue une série de N essais. A chaque essai, il choisit l'un des trois gobelets au hasard. Si le gobelet est vide, on mélange à nouveau les gobelets. Si le gobelet choisi dissimule une clé, le candidat remporte la clé : celle-ci est enlevée de la table de jeu et on mélange à nouveau les trois gobelets.
Pour tout $n \in [\![1;N]\!]$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de clés encore présentes sur la table de jeu à l'issu du $n^{ième}$ tirage (on convient que $Y_0 = 2$).
Pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, on note C_k l'événement « Lors de l'essai k le gobelet choisi dissimule une clé ».

B1. Donner la loi de probabilité de Y_1.

B2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n pour $n \geq 2$?

B3. Calculer $P(Y_n = 2)$ pour tout $n \in [\![1;N]\!]$.

B4. Pour tout entier $n \in [\![1;N]\!]$, on pose $u_n = P(Y_n = 1)$.
B4a. Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.

B4b. A l'aide du système complet d'évènements lié à la variable Y_n, montrer que $\forall n \in [\![2;N-1]\!]$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

1

B4c. En déduire que $\forall n \in [\![2;N]\!]$, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$. Cette relation reste-t-elle valable pour $n = 1$?

CORRIGE

Partie A.

Dans la première épreuve du jeu, une candidate est dans une salle où sont disposées $N+1$ jarres opaques numérotées de 0 à N. Pour $k \in [\![0;N]\!]$, la jarre numéro k contient k clés et $N-k$ scorpions.

L'équipe effectue N lancers indépendants d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité $p \in [0;1]$. La candidate pioche alors au hasard un objet dans la jarre dont le numéro correspond au nombre de « piles » obtenus.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de « piles » obtenus lors de ces N lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la cancidate pioche une clé, 0 sinon.

A1a. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance. **X correspond au nombre de succès (piles) lors de la répétition de N épreuves identiques et indépendantes de probabilités p : on sait alors que** $X \sim \mathcal{B}(N,p)$: ainsi $E(X) = Np$ et $V(X) = Np(1-p)$.

A1b. A l'aide de la formule de Koenig – Huygens, en déduire la valeur de $E(X^2)$. **Or** $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ **donc** $E(X^2) = Np(1-p) + (Np)^2 = Np(Np+1-p)$.

A2a. A l'aide de l'énoncé, déterminer, en fonction de $k \in [\![0;N]\!]$ et de N, le nombre $P_{[X=k]}(Y=1)$.
$[X=k]$ signifie que l'on va piocher dans la jarre numéro k, qui contient k clés et $N-k$ bébêtes. : la probabilité de piocher une clé est donc

$$P_{[X=k]}(Y=1) = \frac{k}{N}.$$

A2b. En utilisant le système complet $([X=k])_{k\in[\![0;N]\!]}$, en déduire $P(Y=1)$ en fonction de $E(X)$ et de N.
Appliquons la formule des probabilités totales au système complet $([X=k])_{k\in[\![0;N]\!]}$, il vient :

$$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{N} P(X=k \cap Y=1) = \sum_{k=0}^{N} P(X=k)P_{[X=k]}(Y=1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P(X=k)k}{N}$$

Et on reconnaît l'espérance de $E(X)$ au numérateur. Ainsi,

$$P(Y=1) = \frac{E(X)}{N}.$$

A2c. Donner la loi de Y et son espérance : **Y prend pour valeurs 0 ou 1, elle suit donc une loi de Bernoulli** de paramètre $P(Y=1) = \frac{E(X)}{N}$. Son espérance est donc $E(Y) = \frac{E(X)}{N}$.

A3. On admet que l'espérance de la v.a. XY est donnée par $E(XY) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k \cap Y=1)$.

A3a. En déduire que $E(XY) = \frac{E(X^2)}{N}$.

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k \cap Y=1) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k)P_{[X=k]}(Y=1) = \sum_{k=1}^{N} \frac{kP(X=k)k}{N}$$

$$E(XY) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2P(X=k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k^2P(X=k) = \frac{E(X^2)}{N}$$

A3b. En déduire la quantité $E(XY) - E(X)E(Y)$ en fonction du paramètre p. **A l'aide du A2c on obtient :**

$$E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{E(X^2)}{N} - E(X) \times \frac{E(X)}{N} = \frac{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}{N} = \frac{V(X)}{N}$$

Or $V(X) = Np(1-p)$ donc

$$E(XY) - E(X)E(Y) = p(1-p)$$

Partie B.

Dans la seconde épreuve, trois gobelets opaques sont disposés sur un tonneau servant de table de jeu. Deux petites clés sont cachées sous deux des gobelets. Le candidat effectue une série de N essais. A chaque essai, il choisit l'un des trois gobelets au hasard. Si le gobelet est vide, on mélange à nouveau les gobelets. Si le gobelet choisi dissimule une clé, le candidat remporte la clé : celle-ci est enlevée de la table de jeu et on mélange à nouveau les trois gobelets.

Pour tout $n \in [\![1; N]\!]$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de clés encore présentes sur la table de jeu à l'issu du $n^{ième}$ tirage (on convient que $Y_0 = 2$).

Pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, on note C_k l'événement « Lors de l'essai k le gobelet choisi dissimule une clé ».

B1. Donner la loi de probabilité de Y_1. Y_1 désigne le nombre de clés restantes à l'issu de 1er essai. Y_1 vaut donc 2 (gobelet vide) ou 1 (gobelet avec clé). On a :

$$P(Y_1 = 2) = P(\overline{C_1}) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(Y_1 = 1) = P(C_1) = \frac{2}{3}$$

B2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n pour $n \geq 2$? $Y_n(\Omega) = \{0,1,2\} = [\![0; 2]\!]$ (on pioche toutes les clés ($n \geq 2$), on en pioche 1 seule, on en pioche aucune).

B3. Calculer $P(Y_n = 2)$ pour tout $n \in [\![1; N]\!]$. L'événement $[Y_n = 2]$ correspond à n essais qui ont aboutit sur le gobelet vide. Ainsi, $(Y_n = 2) = \overline{C_1} \cap \ldots \cap \overline{C_n}$: la formule des probabilités composées donne alors

$$P(Y_n = 2) = P(\overline{C_1}) \times \ldots \times P_{\overline{C_1} \cap .. \cap \overline{C_{n-1}}}(\overline{C_n}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

B4. Pour tout entier $n \in [\![1; N]\!]$, on pose $u_n = P(Y_n = 1)$.

B4a. Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$. On a $u_1 = \frac{2}{3}$. $[Y_2 = 1]$ signifie qu'une clé reste à l'issu des 2 essais, donc on est tombé une fois sur le gobelet vide (au premier ou second essai).

$$P(Y_2 = 1) = P(C_1 \cap \overline{C_2}) + P(\overline{C_1} \cap C_2) = P(C_1)P_{C_1}(\overline{C_2}) + P(\overline{C_1})P_{\overline{C_1}}(C_2)$$

Ainsi,

$$u_2 = P(Y_2 = 1) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

B4b. A l'aide du système complet d'évènements lié à la variable Y_n, montrer que $\forall n \in [\![2; N-1]\!]$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$. Pour $n \in [\![2; N-1]\!]$, $([Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2])$ forme un système complet d'évènements de probabilité non nulle. La formule des probabilités totales donne alors :

$$u_{n+1} = P(Y_n = 0)P_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1) + P(Y_n = 1)P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) + P(Y_n = 2)P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1)$$

- $[Y_n = 0]$ signifie qu'au bout de n essais, 0 clés sont sur la table donc $P_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1) = 0$
- $[Y_n = 1]$ signifie qu'au bout de n essais, 1 clé reste sur la table donc deux gobelets vides : $P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (il y a deux gobelets vides sur la table)
- $[Y_n = 2]$ signifie qu'au bout de n essais, 2 clés restent : $P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$

Ainsi,

$$u_{n+1} = 0 + P(Y_n = 1) \times \frac{2}{3} + \underbrace{P(Y_n = 2)}_{B3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$

B4c. En déduire que $\forall n \in [\![2; N]\!]$, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$. Cette relation reste-t-elle valable pour $n = 1$?

- Une récurrence sans difficultés
- $2\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \frac{2}{3^1} = \frac{2}{3} = u_1$ donc la formule est valable pour $n = 1$.

3