EL Bilia Sup
Prepas ECS 1
Prof. MATTOUNI

Devoir Sur Table Bis

App. Linéaires

Exercice 02

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer une base de son noyau et de son image.

3a. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3b. Retrouver alors les résultats du 2.

4a. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. A quelle(s) condition(s) sur Q existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = Q$?
4b. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$. A quelle(s) condition(s) sur Q les polynômes P et Q ont la même image par u ?

Exercice 03

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$f(u) = (-x - 2z, x + 2z, x + y + z) .$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ puis une base de $Im(f)$.

3. Prouver que f est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques.

4. Prouver que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

5. Soit g le projecteur associé à f. Déterminer les coordonnées du vecteur $g(u)$ où $u = (x, y, z)$.

CORRIGÉ

Exercice 02

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   - P est de degré au plus 2, XP' aussi : par somme $u(P)$ est de degré au plus 2 donc $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$.
   - Vérifions que $u \in L(\mathbb{R}_2[X])$: soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= P + \lambda Q + (1 - X)(P + \lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q + (1 - X)P' + \lambda(1 - X)Q' \\ &= P + (1 - X)P' + Q + (1 - X)Q' \\ &= u(P) + \lambda u(Q) \end{aligned}$$

2. Déterminer une base de son noyau et de son image.
   - Soit $P = aX^2 + bX + c \in Ker(u)$:

$$\begin{aligned} u(P) = 0 &\Leftrightarrow aX^2 + bX + c + (1 - X)(2aX + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow X^2(a - 2a) + X(b + 2a - b) + (c + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \end{cases} \Leftrightarrow P = b(X - 1) \end{aligned}$$

1

Ainsi $Ker(u) = vect(X - 1)$.

   - D'après le théorème du rang, $\dim(Im\,(u)) = 2$: cherchons donc 2 vecteurs libres de $Im\,(u)$. $u(1) = 1$, $u(X^2) = -X^2 + 2X$ conviennent (degrés échelonnés). Ainsi, $Im(u) = vect(1, -X^2 + 2X)$..

3a. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en écrivant en vecteurs colonnes les vecteurs $u(1)$, $u(X)$ et $u(X^2)$ dans la base $(1, X, X^2)$.

3b. Retrouver alors les résultats du 2. **En travaillant sur les vecteurs colonnes de la matrice, on vérifie que :**

- $Im(u) = vect(1, -X^2 + 2X)$ **puisque** $Im(u) = vect(u(1), u(X), u(X^2))$ **et que** $u(1)$ **et** $u(X)$ **sont liés.**
- u **est donc de rang 2, donc de noyau de dimension 1 et comme « colonne 2 – colonne 1 = 0 », on en déduit que** $X - 1$ **est dans le noyau.**

4a. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. A quelle(s) condition(s) sur Q existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = Q$?
Par définition, Q **admet un antécédent si** $Q \in Im(u)$ **! Donc si** $Q \in vect(1, -X^2 + 2X)$.
Ainsi il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = Q$ lorsque $Q = a + b(-X^2 + 2X)$, a, b réels.

4b. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$. A quelle(s) condition(s) sur Q les polynômes P et Q ont la même image par u ?
Par linéarité de u **on a** $u(Q) = u(P) \Leftrightarrow u(Q - P) = 0 \Leftrightarrow Q - P \in Ker(u) = vect(1 - X)$.
Donc P et Q ont la même image par u si $Q = P + a(1 - X)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 03

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$f(u) = (-x - 2z, x + 2z, x + y + z) .$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ puis une base de $Im(f)$.

- $f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u = z(-2,1,1) : Ker(f) = vect\big((-2,1,1)\big).$
- Le théorème du rang assure que f est de rang 2 ; comme les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont sont dans $Im(f)$ et ne sont pas colinéaires (cf matrice), on a
$$Im(f) = vect\big((-1,1,1), (0,0,1)\big) .$$

3. Prouver que f est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques. $A^2 = \cdots = A$ **donc** f **est un projecteur.** C'est le projecteur sur $Im(f) = vect\big((-1,1,1), (0,0,1)\big)$ parallèlement à $Ker(f) = vect\big((-2,1,1)\big)$.

4. Prouver que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$. C'est un résultat du cours puisque f est un projecteur ! Retrouvons le :

> **La démonstration qui suit est celle de la propriété du cours, elle pourrait y être intégrée (elle est indépendante de cet exercice) :**

- Soit $u \in Ker(f) \cap Im(f)$: $u \in Im(f)$ donc $\exists v \in E \mid u = f(v)$.
  Alors, comme $u \in Ker(f)$ on a $f(u) = 0$ et donc $f^2(v) = 0$.
  Mais comme f est un projecteur, $f^2(v) = f(v)$ et par conséquent $f(v) = u = 0$.
  On a donc bien $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

- Prouvons que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.
  Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$: $u = \underbrace{u - f(u)}_{v} + \underbrace{f(u)}_{w}$: évidemment, $w \in Im(f)$.
  Vérifions que $v \in Ker(f)$: $f(v) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$.

2

On a donc bien décomposé tout élément de E en somme de deux éléments de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.

5. Soit g le projecteur associé à f. Déterminer les coordonnées du vecteur $g(u)$ où $u = (x, y, z)$.
f et g étant deux projecteurs associés, on a $f + g = id$ donc $g = id - f$. Autrement dit,

$$g\big((x, y, z)\big) = (x, y, z) - (-x - 2z, x + 2z, x + y + z)$$
$$g\big((x, y, z)\big) = (2x + 2z, -x + y - 2z, -x - y)$$

Remarque : on pourrait aussi passer par la matrice de g, donnée par $B = I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à l'égalité précédente.