Exercice 2 –

Partie A : trois exemples –

1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 , \quad f(x, y, z) = (x + y, x + y, 2z) .$$

   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer un réel λ tel que $f^2 = \lambda f$.

   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   (d) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(f).$$

2. Soit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) , \quad f(M) = 2M + {}^tM .$$

   (a) Ecrire une fonction SCILAB `function a = f(m)` dont le paramètre d'entrée est une matrice M et qui renvoie en sortie la valeur de $f(M)$.

   (b) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que f^2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de f et $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

   (d) Montrer par ailleurs que

$$\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\left(f - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) ,$$

   où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices antisymétriques et l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on note E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles. On définit l'application $f : E \to E$ par :

$$\forall u = (u_n)_{n\geq 0} , \quad f(u) = (nu_0 + 2u_n)_{n\geq 0} .$$

   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

   (b) Montrer que f^2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de f et Id_E.

   (c) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{u \in E \mid u_0 = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((n)_{n\geq 0}).$$

Partie B : le cas général – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux réels α et β tels que

$$f^2 = \alpha f + \beta \mathrm{Id}_E\,.$$

1. On suppose dans cette première question que $\alpha \neq 0$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer que g commute avec f si et seulement si g commute avec f^2.
2. On suppose dans cette deuxième question que $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \alpha^{n-1} f$.
   (b) Montrer que
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f).$$
   (c) En déduire que si f est injectif alors $f = \alpha \mathrm{Id}_E$.
3. On suppose dans cette troisième question que $\beta \neq 0$.
   (a) Montrer que f est bijectif et déterminer f^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$f^n = x_n f + y_n \mathrm{Id}_E$$
   et que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
4. On suppose dans cette quatrième question que $\beta \neq 0$ et $\alpha^2 + 4\beta > 0$.
   (a) Justifier que l'équation $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.
   On les note r et s.
   (b) Vérifier que $r + s = \alpha$ et $rs = -\beta$.
   (c) Calculer $(f - r\mathrm{Id}_E) \circ (f - s\mathrm{Id}_E)$ et $(f - r\mathrm{Id}_E) - (f - s\mathrm{Id}_E)$; en déduire que
   $$\mathrm{Ker}(f - r\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - s\mathrm{Id}_E).$$
   (d) Justifier rapidement $\mathrm{Ker}(f - s\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - r\mathrm{Id}_E)$.
   (e) Déterminer enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la question 3.(b), une expression de f^n en fonction de n.

Corrigé

Exercice 2 –

Partie A : trois exemples –

1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 , \quad f(x, y, z) = (x + y, x + y, 2z) .$$

(a) Pour tout $(\lambda, x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^7$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y', \lambda x + x' + \lambda y + y', 2(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda y, 2\lambda z) + (x' + y', x' + y', 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') . \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\ &= f(x + y, x + y, 2z) \\ &= (x + y + x + y, x + y + x + y, 2(2z)) \\ &= (2x + 2y, 2x + 2y, 4z) \\ &= 2f(x, y, z) . \end{aligned}$$

Donc $f^2 = 2f$.

(c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0)).$$

Ainsi la famille $((-1, 1, 0))$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme elle ne contient qu'un seul vecteur, et qu'il est non-nul, cette famille est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Comme $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) \\ & = & \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,1,0),(0,0,2)) \\ & = & \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,2)) \\ & = & \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1)) \end{array}$$

Ainsi la famille $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle ne contient que deux vecteurs, et que ceux-ci ne sont pas colinéaires, cette famille est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = f(x,y,z) - 2(x,y,z) = (-x+y, x-y, 0)\,.$$

Calculons $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} -x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1)) = \mathrm{Im}(f).$$

Comme $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) & = & \mathrm{Vect}((f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(1,0,0), (f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(0,1,0), (f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(0,0,1)) \\ & = & \mathrm{Vect}((-1,1,0),(1,-1,0),(0,0,0)) \\ & = & \mathrm{Vect}((-1,1,0)) \\ & = & \mathrm{Ker}(f)\,. \end{array}$$

2. (a)
```
function a = f(m)
    a = 2*m+m'
endfunction
```

(b) Soit $(\lambda, M, M') \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda M + M') & = & 2(\lambda M + M') + {}^t(\lambda M + M') \\ & = & 2\lambda M + 2M' + \lambda\, {}^tM + {}^tM' \\ & = & \lambda f(M) + f(M')\,. \end{array}$$

Donc f est linéaire. Et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f^2(M) &= f(f(M)) \\ &= 2f(M) + {}^t(f(M)) \\ &= 2f(M) + {}^t(2M + {}^tM) \\ &= 2f(M) + 2\,{}^tM + M \\ &= 2f(M) + 2(f(M) - 2M) + M \\ &= 4f(M) - 3M\,. \end{aligned}$$

Ainsi $f^2 = 4f - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

(d) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) &\iff f(M) - M = 0 \\ &\iff M + {}^tM = 0 \\ &\iff {}^tM = -M \\ &\iff M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
De même

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}\left(f - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) &\iff f(M) - 3M = 0 \\ &\iff -M + {}^tM = 0 \\ &\iff {}^tM = M \\ &\iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\left(f - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on note E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles. On définit l'application $f : E \to E$ par :

$$\forall u = (u_n)_{n\geq 0}\,, \quad f(u) = (nu_0 + 2u_n)_{n\geq 0}\,.$$

(a) Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times E \times E$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (n(\lambda u_0 + v_0) + 2(\lambda u_n + v_n))_{n\geq 0} \\ &= (\lambda n u_0 + n v_0 + 2\lambda u_n + 2v_n)_{n\geq 0} \\ &= \lambda(nu_0 + 2u_n)_{n\geq 0} + (nv_0 + 2v_n)_{n\geq 0} \\ &= \lambda f(u) + f(v)\,. \end{aligned}$$

Donc f est linéaire et $f : E \to E$. Donc f est un endomorphisme de E.

(b) Soit $u \in E$. Posons $v = f(u)$. Alors $v_0 = 0 \cdot u_0 + 2u_0 = 2u_0$ et donc

$$\begin{aligned} f^2(u) &= f(v) \\ &= (nv_0 + 2v_n)_{n\geq 0} \\ &= (2nu_0 + 2v_n)_{n\geq 0} \\ &= (2v_n - 4u_n + 2v_n)_{n\geq 0} \\ &= (4v_n - 4u_n)_{n\geq 0} \\ &= 4f(u) - 4u\,. \end{aligned}$$

(c) Pour tout $u \in E$,

$$(f - 2\mathrm{Id}_E)(u) = f(u) - 2u = (nu_0)_{n\geq 0}\,.$$

Soit $u \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Alors $(f - 2\mathrm{Id}_E)(u)$ est la suite nulle.
Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nu_0 = 0$. En particulier pour $n = 1$, $u_0 = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \{u \in E \mid u_0 = 0\}$.
Réciproquement soit $u \in E$ une suite telle que $u_0 = 0$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nu_0 = 0$ et donc $(f - 2\mathrm{Id}_E)(u)$ est la suite nulle.
Ainsi on a montré que $\{u \in E \mid u_0 = 0\} \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
Bilan : $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{u \in E \mid u_0 = 0\}$.

Soit $u \in \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
Alors il existe $v \in E$ une suite telle que $u = (f - 2\mathrm{Id}_E)(v) = (nv_0)_{n\geq 0} = v_0(n)_{n\geq 0}$.
Ainsi $u \in \mathrm{Vect}((n)_{n\geq 0})$. On a donc montré que : $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((n)_{n\geq 0})$.
Soit $u \in \mathrm{Vect}((n)_{n\geq 0})$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha(n)_{n\geq 0} = (\alpha n)_{n\geq 0}$.
Soit v une suite telle que $v_0 = \alpha$. Alors $u = (v_0 n)_{n\geq 0} = (f - 2\mathrm{Id}_E)(v)$.
Donc $u \in \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc montré que : $\mathrm{Vect}((n)_{n\geq 0}) \subset \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
Bilan : $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((n)_{n\geq 0})$.

Partie B : le cas général –

1. On suppose que g commute avec f. Alors

$$g \circ f^2 = (g \circ f) \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ (f \circ g) = f^2 \circ g.$$

Donc g commute avec f^2.
On suppose réciproquement que g commute avec f^2. Ainsi $g \circ f^2 = f^2 \circ f$ i.e.

$$g \circ (\alpha f + \beta \mathrm{Id}_E) = (\beta \mathrm{Id}_E + \alpha f) \circ g \quad \text{i.e.} \quad \alpha g \circ f + \beta g = \alpha f \circ g + \beta g.$$

On en déduit que $\alpha g \circ f = \alpha f \circ g$.
Comme α est non-nul, on peut multiplier l'égalité précédente par $\frac{1}{\alpha}$ pour obtenir $g \circ f = f \circ g$.
Donc g commute avec f.
On a ainsi bien démontré l'équivalence demandée.

2. (a) D'après l'hypothèse faite à cette question $f^2 = \alpha f$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{A}(n)$: « $f^n = \alpha^{n-1} f$ ».
Initialisation : Comme $f = 1 \cdot f = \alpha^0 f$, la propriété $\mathcal{A}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. Alors

$$f^{n+1} = f^n \circ f = \alpha^{n-1} f \circ f = \alpha^{n-1} f^2 = \alpha^{n-1} \alpha f = \alpha^n f.$$

Donc la propriété $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.
Bilan : la propriété $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On a donc

$$(f - \alpha \mathrm{Id}_E)(x) = (f - \alpha \mathrm{Id}_E)(f(y)) = f^2(y) - \alpha f(y) = 0_E.$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$. On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$. Alors $f(x) - \alpha x = 0_E$ i.e. $\alpha x = f(x)$ i.e.

$$x = \frac{1}{\alpha} f(x) = f\left(\frac{1}{\alpha} \cdot x\right).$$

Donc $x \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a montré que $\mathrm{Ker}(f-\alpha \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Bilan : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = (f-\alpha\mathrm{Id}_E)(y) = f(y)-\alpha y$. On a donc

$$f(x) = f(f(y)-\alpha y) = f^2(y) - \alpha f(y) = 0_E.$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ i.e. $\alpha x = -f(x) + \alpha x = -(f-\alpha\mathrm{Id}_E)(x)$ i.e.

$$x = -\frac{1}{\alpha}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)(x) = (f-\alpha\mathrm{Id}_E)\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot x\right).$$

Donc $x \in \mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$. Ainsi on a montré que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$.
Bilan : $\mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f)$.

(c) On suppose que f est injectif. Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Ainsi d'après la question précédente $\mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$ ce qui signifie que :

$$\forall x \in E\ ,\quad (f-\alpha\mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \quad \text{i.e.} \quad f(x) = \alpha x\,.$$

Ainsi $f = \alpha\mathrm{Id}_E$.

3. (a) On a par hypothèse $f^2 - \alpha f = \beta\mathrm{Id}_E$ et donc, comme $\beta \neq 0$,

$$f \circ \left(\frac{1}{\beta}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\right) = \left(\frac{1}{\beta}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\right) \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Ainsi f est bijectif et

$$f^{-1} = \frac{1}{\beta}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\,.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{B}(n)$: « il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^n = x_n f + y_n\mathrm{Id}_E$ ».
Initialisation : Comme $f^0 = \mathrm{Id}_E = 0 \cdot f + 1 \cdot \mathrm{Id}_E$, la propriété $\mathcal{B}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{B}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{array}{rcl} f^{n+1} & = & f^n \circ f \\ & = & (x_n f + y_n\mathrm{Id}_E) \circ f \\ & = & x_n f^2 + y_n f \\ & = & x_n(\alpha f + \beta\mathrm{Id}) + y_n f \\ & = & (\alpha x_n + y_n) f + (\beta x_n)\mathrm{Id}_E\,. \end{array}$$

En posant $x_{n+1} = \alpha x_n + y_n$ et $y_{n+1} = \beta x_n$, on obtient $\mathcal{B}(n+1)$.
Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(n)$ est vraie.

(c) D'après l'hérédité de la récurrence précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + y_{n+1} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

4. (a) Le discriminant de l'équation $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ est $\Delta = (-\alpha)^2 - 4(-\beta) = \alpha^2 + 4\beta > 0$. Donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

(b) On a alors

$$x^2 - \alpha x - \beta = (x-r)(x-s) = x^2 - (r+s)x + rs.$$

Par identification des coefficients de deux polynômes égaux, on obtient $r + s = \alpha$ et $rs = -\beta$.

(c) On a
$$(f-r\mathrm{Id}_E)\circ(f-s\mathrm{Id}_E)=f^2-(r+s)f+rs\mathrm{Id}_E=f^2-\alpha f-\beta\mathrm{Id}_E=\theta;$$
où l'on a noté θ l'endomorphisme nul. Et
$$(f-r\mathrm{Id}_E)-(f-s\mathrm{Id}_E)=(s-r)\mathrm{Id}_E\,. \qquad (\triangle)$$
Soit $x\in\mathrm{Im}(f-s\mathrm{Id}_E)$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=(f-s\mathrm{Id}_E)(y)$. Et donc
$$(f-r\mathrm{Id}_E)(x)=(f-r\mathrm{Id}_E)\circ(f-s\mathrm{Id}_E)(y)=\theta(y)=0_E.$$
Donc $x\in\mathrm{Ker}(f-r\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f-s\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-r\mathrm{Id}_E)$.

Soit à présent $x\in\mathrm{Ker}(f-r\mathrm{Id}_E)$. Alors d'après $(\triangle)$
$$(s-r)x=-(f-s\mathrm{Id}_E)(x) \quad \text{i.e.} \quad x=(f-s\mathrm{Id}_E)\left(-\frac{1}{s-r}\cdot x\right).$$
Donc $x\in\mathrm{Im}(f-s\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f-r\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Im}(f-s\mathrm{Id}_E)$.
Bilan : $\mathrm{Ker}(f-r\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Im}(f-s\mathrm{Id}_E)$.

(d) Par symétrie des rôles de r et s, on peut conclure que $\mathrm{Ker}(f-s\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Im}(f-r\mathrm{Id}_E)$.

(e) D'après la question 3.(b) (que l'on peut utiliser car $\beta>0$), la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$$x^2-\alpha x-\beta=0.$$
Ainsi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n=\lambda r^n+\mu s^n$.
Or $x_0=0$ d'après $\mathcal{B}(0)$ et $y_0=1$ et donc $x_1=\alpha x_0+y_0=1$. Ainsi on doit résoudre le système
$$\begin{cases}\lambda+\mu &= 0\\ \lambda r+\mu s &= 1\end{cases}$$
On trouve
$$\lambda=-\mu=\frac{1}{r-s}\,.$$
Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$x_n=\frac{r^n-s^n}{r-s}$$
et
$$y_n=x_{n+1}-\alpha x_n=\frac{1}{r-s}(r^{n+1}-s^{n+1}-(r+s)(r^n-s^n))=\frac{r\cdot s^n-s\cdot r^n}{r-s}.$$
Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$f^n=\frac{1}{r-s}\big((r^n-s^n)f^n+(r\cdot s^n-s\cdot r^n)\mathrm{Id}_E\big).$$