El Bilia Sup
Prepas ECS1
Prof MAJOUNI

Devoir Sur Table
Applications
lineaires

Exercice 01

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et P le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$. On note I la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$. On cherche à écrire les puissances de A comme combinaison linéaire des matrices A et I.

1. Montrer que P est un polynôme annulateur de A.

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

3. Déterminer, en fonction de n, le polynôme R reste de la division euclidienne de X^n par P.

4. En déduire une expression de A^n sous la forme $A^n = a_n A + b_n I$ où a_n et b_n sont des réels.

5. Vérifier que cette expression reste vraie pour $n = -1$.

6. On définit les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n \end{cases}.$$

Proposer une méthode pour expliciter les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) en fonction de n.
En déduire un algorithme sous Scilab, qui permette de retourner le terme de rang n des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n), n étant saisi par l'utilisateur.

Exercice 02

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel. On note

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases}\right\}$$

et $G = vect(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1,1,1,1)$ et $v_2 = (2, -1, -1, 1)$.

1. Prouver que F est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et en déterminer une base.

2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. Considérons l'application $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 = F \oplus G & \to & \mathbb{R}^4 \\ x = x_1 + x_2 & \to & x_1 - x_2 \end{array}$, appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.

3a. Prouver que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

3b. Déterminer s^2 et en déduire que s est un automorphisme.

4. On note p l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$f(u) = (-x - 2y, x + 2y, x + y + z) .$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ puis une base de $Im(f)$.

3. Prouver que f est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques.

4. Prouver que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

5. Soit g le projecteur associé à f. Déterminer les coordonnées du vecteur $g(u)$ où $u = (x, y, z)$.

EXERCICE 4

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1a. Rappeler la dimension de E.

1b. Montrer que f est un endomorphisme de E.

1c. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.

1d. La matrice M est-elle inversible ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

1e. Préciser le noyau $Kerf$ de f ainsi qu'une base de $Kerf$.

1f. Déterminer l'image Imf de f.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.

Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.

2a. Soit P un polynôme de E tel que $P \notin Ker(u^3)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

2b. Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

2c. Établir que $Ker\ u \subset Ker(g - id_E)$

2d. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $g - id$ relativement à la base $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ et déterminer son rang.

2e. Déterminer la matrice de l'endomorphisme u relativement à la base $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ et déterminer son rang.

2f. En déduire que $Ker\ u = Ker(g - id_E)$

CORRIGÉ

Exercice 01

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et P le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$. On note I la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$. On cherche à écrire les puissances de A comme combinaison linéaire des matrices A et I.

1. Montrer que P est un polynôme annulateur de A. **On a** $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **et** $A^2 - 3A + 2I = \cdots = 0$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse. $A(A - 3I) = -2I$ **donc** $A\left(-\frac{1}{2}(A - 3I)\right) = I$:

la matrice A **est donc inversible d'inverse** $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -0.5 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer, en fonction de n, le polynôme R reste de la division euclidienne de X^n par P. **Appliquons la méthode vue en cours :**

- $P = (X - 1)(X - 2)$
- **On cherche un polynôme** R **de degré** $\deg(R) < \deg(P)$ **tel que** $X^n = P.Q + R$.
  R **est donc de la forme** $R = aX + b$ **où** a **et** b **sont réels.**
- **Evaluons,** en $X = 1 : 1 = a + b$
  en $X = 2 : 2^n = 2a + b$
  La résolution du système donne alors $a = 2^n - 1$ **et** $b = 2 - 2^n$.
- **Ainsi, le reste cherché est** $R(X) = (2^n - 1)X + (2 - 2^n)$.

4. En déduire une expression de A^n sous la forme $A^n = a_n A + b_n I$ où a_n et b_n sont des réels. **L'égalité** $X^n = P.Q + R$ **évaluée en** A **donne :** $A^n = \underbrace{P(A)}_{0} \times Q(A) + R(A) = R(A)$ **: donc** $A^n = \underbrace{(2^n - 1)}_{a_n} A + \underbrace{(2 - 2^n)}_{b_n} I$.

5. Vérifier que cette expression reste vraie pour $n = -1$. **Elle est vraie pour** $n = -1$ **puisque**

$$(2^{-1} - 1)A + (2 - 2^{-1})I = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = -\frac{1}{2}(A - 3I) \overset{Q2}{=} A^{-1}$$

6. On définit les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n \end{cases}.$$

Proposer une méthode pour expliciter les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) en fonction de n.
En déduire un algorithme sous Scilab, qui permette de retourner le terme de rang n des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n), n étant saisi par l'utilisateur.

La stratégie est classique : en notant T_n **le vecteur** $T_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, **le système ci-dessus devient** $T_{n+1} = AT_n$.

On peut alors montrer par une récurrence simple que pour tout entier naturel n **on a**

$$T_n = A^n T_0 \quad \text{où} \quad T_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voic un algorithme possible :

```
clc()
n=input("Entrer un entier ")
A = [3 0 -2;2 1 -2;1 0 0]
ci = [1;2;-1]
disp(A^n * ci,"Solution du systeme (x,y,z)")
```

3

Exercice 02

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel. On note

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \end{cases}\right\}$$

et $G = vect(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1,1,1,1)$ et $v_2 = (2,-1,-1,1)$.

1. Prouver que F est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et en déterminer une base. **Prouvons les deux d'un coups.**

Résolvons le système $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \end{cases}$ **: deux paramètres sont à priori nécessaires, z et t par exemple.**

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z-t \\ 2x-y=z-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-2t & (L1+L2) \\ -3y=3z+t & (L2-2L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2t/3 \\ y=-(3z+t)/3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{(-2t/3, -(3z+t)/3, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= \left\{t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) + z(0,-1,1,0) \in \mathbb{R}^4 \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Ainsi, par définition : $F = vect\left(\underbrace{(-2,-1,0,3)}_{u_1} ; \underbrace{(0,-1,1,0)}_{u_2}\right)$: la famille $(u_1; u_2)$ étant libre, elle forme une base de F.

2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

- Notons qu'une base de G est la famille (v_1, v_2) (vecteurs non colinéaires et générateurs).
  Ainsi, $\dim(G) + \dim(F) = 2 + 2 = \dim(\mathbb{R}^4)$.
- Vérifions que $F \cap G = \{0\}$: soit $u \in F \cap G$.
  $u \in G$ donc il existe a et b réels tels que $u = av_1 + bv_2 = (a+2b, a-b, a-b, a+b)$.
  Or $u \in F$ donc (voir les contraintes de F) :
  $$\begin{cases} (a+2b)+(a-b)+(a-b)+(a+b)=0 \\ 2(a+2b)-(a-b)-(a-b)+(a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=0 \\ a+7b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$
- Ainsi, $u = av_1 + bv_2 = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$.

3. Considérons l'application s : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 = F \oplus G & \to & \mathbb{R}^4 \\ x = x_1 + x_2 & \to & x_1 - x_2 \end{array}$, appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.

3a. Prouver que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

- Déjà, s est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^4$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ les décompositions suivant la somme directe $F \oplus G$.
  Le point essentiel est de remarquer que la décomposition de $x + \lambda y$ suivant la somme directe $F \oplus G$ est donnée par $x + \lambda y = \underbrace{x_1 + \lambda y_1}_{\in F} + \underbrace{x_2 + \lambda y_2}_{\in G}$ puisque F et G sont deux espaces vectoriels.

  Alors, par définition :
  $$s(x+\lambda y) = x_1 + \lambda y_1 - (x_2 + \lambda y_2) = \underbrace{x_1 - x_2}_{s(x)} + \lambda \underbrace{(y_1 - y_2)}_{s(y)}$$
- s est donc bien un endomorphisme

3b. Déterminer s^2 et en déduire que s est un automorphisme.

- $s^2(x) = s(s(x)) = s(x_1 - x_2) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x$: ainsi $s^2 = id$.
- $s \circ s = id$ donc par définition s est bijective de bijection réciproque $s^{-1} = s$.

4. On note p l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$.
Vérifier que p est un projecteur de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer ses éléments caractériques (à l'aide par exemple des notations de la question 3).

- Vérifions que $p^2 = p$:
  $$p^2 = p \circ p = \left(\frac{1}{2}(s+id)\right) \circ \left(\frac{1}{2}(s+id)\right) = \frac{1}{4}(s^2 + s + s + id) = \frac{1}{4}(2s + 2id)$$
  Or $p = \frac{1}{2}(s+id) \Leftrightarrow 2p = s + id$ donc $2s + 2id = 4p$ et $p^2 = \frac{1}{4}\,4p = p$.
- Remarquons que, avec les notations du 3 :
  $$p(x) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_1 + x_2) = x_1$$
  p est en fait le projecteur sur F parallèlement à G.

4

Ex 3

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$f(u) = (-x - 2y, x + 2y, x + y + z)$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ puis une base de $Im(f)$.

- $f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u = y(-2,1,1) : Ker(f) = vect((-2,1,1))$.
- Le théorème du rang assure que f est de rang 2 ; comme les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont sont dans $Im(f)$ et ne sont pas colinéaires (cf matrice), on a

$$Im(f) = vect((-1,1,1), (0,0,1)).$$

3. Prouver que f est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques. $A^2 = \cdots = A$ donc f est un projecteur. C'est le projecteur sur $Im(f) = vect((-1,1,1), (0,0,1))$ parallèlement à $Ker(f) = vect((-2,1,1))$.

4. Prouver que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$. C'est un résultat du cours puisque f est un projecteur ! Retrouvons-le :

- Soit $u \in Ker(f) \cap Im(f)$: $u \in Im(f)$ donc $\exists v \in E \mid u = f(v)$.
  Alors, comme $u \in Ker(f)$ on a $f(u) = 0$ et donc $f^2(v) = 0$.
  Mais comme f est un projecteur, $f^2(v) = f(v)$ et par conséquent $f(v) = u = 0$.
  On a donc bien $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

- Prouvons que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.
  Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$: $u = \underbrace{u - f(u)}_{v} + \underbrace{f(u)}_{w}$: évidemment, $w \in Im(f)$.
  Vérifions que $v \in Ker(f)$: $f(v) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$.

On a donc bien décomposé tout élément de E en somme de deux éléments de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.

5. Soit g le projecteur associé à f. Déterminer les coordonnées du vecteur $g(u)$ où $u = (x, y, z)$.

f et g étant deux projecteurs associés, on a $f + g = id$ donc $g = id - f$. Autrement dit,

$$g((x,y,z)) = (x,y,z) - (-x - 2y, x + 2y, x + y + z) = (2x + 2y, -x - y, -x - y)$$

Remarque : on pourrait aussi passer par la matrice de g, donnée par $B = I - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à l'égalité précédente.

CORRIGÉ EXERCICE 4

1. (a) $dim E = 4$.

   (b) • Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda P + Q) = -3X(\lambda P + Q) + X^2(\lambda P + Q)' = \lambda(-3XP + X^2P') + (-3XQ + X^2Q') = \lambda f(P) + f(Q),$$

   donc f est linéaire.

   • Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. Alors

$$f(P) = -3X(aX^3 + bX^2 + cX + d) + X^2(3aX^2 + 2bX + c) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX \in E,$$

   donc f est bien un endomorphisme de E.

   (c) On a $f(1) = -3X$, $f(X) = -2X^2$, $f(X^2) = -X^3$ et $f(X^3) = 0$, donc

$$M = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f) = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5

donc $g^{-1} = Id - u$.

Rq : on aurait pu procéder complètement autrement en remarquant que

$$g \circ (Id - u) = (Id + u + u^2 + u^3) \circ (Id - u) = Id + u + u^2 + u^3 - (u + u^2 + u^3 + u^4) = Id - u^4 = Id,$$

et donc directement que g est bijectif et $g^{-1} = Id - u$.

(c) Pour tout $Q \in ker u$, on a $u(Q) = 0$, donc $(g - Id)(Q) = u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0$, donc $Q \in ker(g - Id)$.
Par suite, on a $ker u \subset ker(g - Id)$.
De plus, comme $Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g - Id) = T - I$ est de rang 3, $g - Id$ est de rang 3, donc d'après le théorème du rang, $dim(ker(g - Id)) = 4 - rg(g - Id) = 1$.
De même, comme $Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3, u est de rang 3, donc d'après le théorème du rang, $dim(ker u) = 4 - rg(u) = 1$.
Par suite, on a $dim(ker u) = dim(ker(g - Id))$ (et $ker u \subset ker(g - Id)$), donc

$$ker u = ker(g - Id).$$

(d) • M est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale, donc non-inversible.
• Comme M est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc $Sp(M) = \{0\}$.
Si M était diagonalisable, il existerait alors P inversible telle que $M = P.(0I).P^{-1} = 0$... Or $M \neq 0$, donc M n'est pas diagonalisable.
• On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^4 = 0,$$

et, par suite, pour tout $n \geq 4$, $M^n = M^4 M^{n-4} = 0 M^{n-4} = 0$.

(e) $aX^3 + bX^2 + cX + d \in Ker f \Leftrightarrow f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \Leftrightarrow -bX^3 - 2cX^2 - 3dX = 0 \Leftrightarrow b = c = d = 0$, donc $Ker f = \{aX^3, a \in \mathbb{R}\} = Vect(X^3)$.
La famille (X^3) est libre (un seul polynôme, non nul) et génératrice de $ker f$, donc c'est une base de $ker f$, *qui est donc de dimension 1.*

(f) $Im f = Vect(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = Vect(-3X, -2X^2, -X^3, 0) = Vect(X, X^2, X^3)$.

2. (a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$. (*)
Alors, en composant (*) par u^3, on obtient $au^3(P) + bu^4(P) + cu^5(P) + du^6(P) = 0$, c'est-à-dire $au^3(P) = 0$ (car $u^4 = 0$), et donc $a = 0$ (car $u^3(P) \neq 0$).
Puis, en composant (*) cette fois par u^2, on obtient $bu^3(P) + cu^4(P) + du^5(P) = 0$, c'est-à-dire $bu^3(P) = 0$ et donc $b = 0$.
Ensuite, en composant (*) cette fois par u, on obtient $cu^3(P) + du^4(P) = 0$, c'est-à-dire $cu^3(P) = 0$ et donc $c = 0$.
Enfin, (*) est devenue $du^3(P) = 0$, et on a donc aussi $d = 0$.
La famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est donc libre, et, comme elle est composée de 4 éléments dans un espace, E, de dimension 4, c'est une base de E.

(b) • On a $g(P) = P + u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u(P)) = u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u^2(P)) = u^2(P) + u^3(P)$ et $g(u^3(P)) = u^3(P)$, donc

$$T = Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme T est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale, T est inversible, donc g est bijectif et, par suite, g est bien u automorphisme de E.
• Via Gauss-Jordan (calculs sur la copie) ou en voyant T comme une matrice de changement de base, on obtient

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Id - Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u).$$