Devoir Maison N°13

Séries Numériques

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
On pourra utiliser sans justification que $x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$, et que $2 < e < 3$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) * Montrer que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel noté γ et appelé **constante d'Euler**.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$: $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite v est convergente.
   indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $k \geq 3$, $\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(k)}{k}$.
5. (a) ** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
   indication : remarquer $\sum_{k=1}^{2n} \ldots = \sum_{\substack{k=1 \\ k\, pair}}^{2n} \ldots + \sum_{\substack{k=1 \\ k\, impair}}^{2n} \ldots$ et l'appliquer deux fois
   (b) En déduire que $S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$
6. Démontrer alors que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$

FIN