Probabilités Discrètes

Devoir Maison N°14

On considère deux jetons J_1 et J_2 équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience. On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et , pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le k-ème lancer fait apparaître une face numéroté 1 ».

Partie I : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1. a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne une face portant le numéro 1 lors du premier lancer.
   b) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne deux fois une face portant le numéro 1 lors des deux premiers lancers.
   c) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu deux fois une face portant le numéro 1 lors des deux premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1.

2. a) Décrire $X(\Omega)$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $P(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
   c) En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   d) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
   e) Soit T la variable aléatoire égale à $X + 1$. Déterminer la loi de T et reconnaître une loi usuelle.
   En déduire $V(T)$ puis $V(X)$.
3. a) Décrire $Y(\Omega)$.
   b) Calculer $P(Y = 1)$ puis pour tout entier $n \geq 2$, $P(Y = n)$.
   c) Vérifier que Y est définie presque sûrement (on fera attention au cas $n = 1$).
   d) Montrer que Y admet une espérance puis déterminer $E(Y)$.

4. On définit la variable aléatoire S sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $S = \max(X, Y)$. C'est à dire que S prend la valeur de X si celle-ci est plus grande que la valeur de Y et que S prend la valeur de Y dans le cas contraire.

   a) Justifier que $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.

   c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Justifier

   $$P(S = n) \quad = \quad P((X = n) \cap (Y = n)) + P((X = n) \cap (Y < n)) + P((Y = n) \cap (X < n))$$

   En déduire que $P(S = n) = P(X = n) + P(Y = n)$.

   d) Déterminer la loi de S.

5. On définit la variable aléatoire I sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $I = \min(X, Y)$.

   a) Montrer que $I(\Omega) = \{0, 1\}$.

   b) Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de I, ainsi que son espérance.

Partie II : simulation des variables X et Y.

On rappelle que `random(2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1\}$. On considère le programme :

```
VAR
   jeton,lancer,X : integer ;
BEGIN
   X := 0 ; jeton := random(2)+1 ;
   IF (jeton=1) THEN
         Begin
            REPEAT
               X := X+1 ;
               lancer := random(2) ;
            UNTIL (lancer=0) ;
         End ;
   WriteLn(X) ;
END.
```

1. Expliquer le fonctionnement du programme et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

2. Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `REPEAT ... UNTIL` est fini ?

3. Ecrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable aléatoire Y.

FIN

Exercice 2

Partie I

1. a) On cherche $P(U_1)$. E et $\overline{E}$ forment un SCE. D'après la FPT on a :

$$\begin{aligned} P(U_1) &= P(E \cap U_1) + P(\overline{E} \cap U_1) \\ &= P(E)P_E(U_1) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(U_1) \\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.1 \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{P(U_1) = \frac{3}{4}}$

b) On cherche $P(U_1 \cap U_2)$. Toujours par la FPT :

$$\begin{aligned} P(U_1 \cap U_2) &= P(E \cap U_1 \cap U_2) + P(\overline{E} \cap U_1 \cap U_2) \\ &= P(E)P_E(U_1 \cap U_2) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(U_1 \cap U_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.1^2 \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{P(U_1 \cap U_2) = \frac{5}{8}}$

c) On cherche $P_{U_1 \cap U_2}(E)$. D'après la formule de Thomas Bayes,

$$P_{U_1 \cap U_2}(E) = \frac{P(E)P_E(U_1 \cap U_2)}{P(U_1 \cap U_2)} = \frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

Cl : La probababilité que le joueur ait joué avec le jeton J_1 sachant qu'il a obtenu deux fois 1 est $\frac{1}{5}$.

2. a) X est infinie. $X(\Omega) = \mathbb{N}$. En effet la valeur 0 est attribuée si l'on obtient jamais 1 et toutes les valeurs supérieures à 1 sont envisageables.

b) Soit $n \geq 1$. X ne peut être égal à n que si l'on choisit le jeton J_1. Il vient :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(E \cap U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1} \cap \overline{U_n}) \\ &= P(J_1)P_{J_1}(U_1) \cdots P_{J_1 \cap \cdots U_{n-1}}(\overline{U_n}) \\ &= \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} (n+1 \text{ fois}) \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{\forall n \geq 1, \quad P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

c) $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Dès lors, $P(X = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$. Il vient

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}.\frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}}$.

Ce résultat était prévisible : on est presque sûr de tirer à un moment donné une face 1 si l'on a choisi le jeton J_1 et c'est impossible si on a choisi le jeton J_2. $P(X = 0)$ est donc égal à $P(J_1)$.

d) • **Existence**

Pour $n \geq 1$, $nP(X=n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

On a une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$ avec $|\frac{1}{2}| < 1$. Cette série est donc absolument convergente et X admet donc une espérance.

• **Calcul**

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{n\in X(\Omega)} nP(X=n) &= 0 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{(1-1/2)^2} = 1 \end{aligned}$$

• Cl : $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = 1}$

e) $T(\Omega) = \{i+1, \ \ i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(T=n) = P(X+1=n) = P(X=n-1) = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}$$

On reconnaît une loi géométrique : $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)}$

Par propriété $V(T) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$.

Dès lors, en utilisant $V(aX+b) = a^2V(X)$, on a :

$$2 = V(T) = V(X+1) = V(X)$$

Cl : $\boxed{V(T) = V(X) = 2}$

3. a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

b) $P(Y=1)$ est la probabilité de tirer un face numéro 1 au premier tirage. D'après 1.a) $P(Y=1) = \frac{3}{4}$.

Soit $n \geq 2$, si l'on choisit le jeton J_2 on tirera à coup sûr une face 1 au premier tirage. Il vient :

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P(E \cap \overline{U_1} \cap \cdots \cap \overline{U_{n-1}} \cap U_n) \\ &= P(E)P_E(\overline{U_1} \cap \cdots \cap \overline{U_{n-1}} \cap U_n) \\ &= \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{\forall n \geq 1, \ \ P(Y=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

c) Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in Y(\Omega)} P(Y=n) = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{n\in Y(\Omega)} P(Y=n) &= P(Y=1) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}.\frac{(1/2)^2}{1-1/2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{Y \text{ est définie presque sûrement}}$

d) • **Existence**

Pour $n \geq 2$, $nP(Y=n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

On a une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$ avec $|\frac{1}{2}| < 1$. Cette série est donc absolument convergente et X admet donc une espérance.

• **Calcul**

$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{n\in Y(\Omega)} nP(X=n) &= 1.P(Y=1) + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2} - 1\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cl : $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \dfrac{3}{2}}$

4. a) $S(\Omega) = \{\max(i,j) \text{ avec } i \in \mathbb{N},\ \ j \in \mathbb{N}^*\}$. La plus grande valeure entre i et j est donc toujours supérieure à 1.

   Cl : $\boxed{S(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

   b) Si X est égal à 0 c'est presque sûrement parce que l'on a choisi le jeton J_2 et dans ce cas, on a nécessairement $Y = 1$ et donc $S = \max(X,Y) = 1$. Si X n'est pas égal à 0, c'est qu'on a choisi le jeton J_1. Dans ce cas X ou Y est nécessairement supérieur ou égal à 2 donc S n'est pas égal à 1.

   Cl : $\boxed{P(S=1) = P(X=0) = \dfrac{1}{2}}$

   c) Soit $n \geq 2$. Il est clair que la plus grande valeure entre X et Y vaut n ssi X et Y valent tous les deux n ou si l'un vaut n et l'autre est strictement inférieur à n. C'est trois événements étant incompatibles,

$$\begin{aligned} P(S=n) &= P((X=n)\cap(Y=n)) + P((X=n)\cap(Y<n)) \\ &\quad + P((Y=n)\cap(X<n)) \end{aligned}$$

   Si $(X=n)$ c'est que le premier 0 apparait après n lancers on a donc obtenu des 1 lors des $n-1$ premiers lancers et l'évt $(Y<n)$ est réalisé. Cela prouve que $P((X=n)\cap(Y<n)) = P(X=n)$. De même $P((Y=n)\cap(X<n)) = P(Y=n)$.

   Enfin, pour les mêmes raisons $(X=n)$ et $(Y=n)$ ne peuvent être réalisés en même temps. Il vient :

$$P(S=n) = 0 + P(X=n) + P(Y=n)$$

   d) On a donc $P(S=1) = \dfrac{1}{2}$ et pour $n \geq 2$,

$$P(S=n) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

   Ce qui est aussi vrai pour $n=1$.

   Cl : La loi de S est donnée par :

$$\left\{ S(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \ \forall n \geq 1,\ \ P(S=n) = \frac{1}{2^n} \right.$$

5. a)
   - Si on choisit le jeton J_1 alors à l'issue du premier lancer on obtient soit 0 soit 1 et X ou Y est égal à 1 donc $I = 1$.
   - Si on choisit le jeton J_2 alors on n'obtiendra jamais 0 donc $X = 0$ et I aussi.

   Cl : $I(\Omega) = \{0,1\}$.

   b) $P(I=0) = P(J_2) = \dfrac{1}{2}$. Donc $P(I=1) = \dfrac{1}{2}$ et $E(I) = \dfrac{1}{2}$.

Partie II

1. La variable `jeton` vaut 1 ou 2 elle représente le numéro du jeton choisit par le joueur au départ.

   - Si c'est le jeton 1, on fait des lancers successifs simulés par la variable `lancer` qui vaut 0 ou 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On s'arrête dès qu'on obtient 0.
   - Dans le cas contraire, on n'obtiendra jamais 0, X sera donc égale à 0, ce qui est bien le cas puisque l'on ne fait pas la boucle.

   Le programme simule notre expérience et renvoie la valeur aléatoire de la variable X.

2. La boucle tourne seulement lorsque le jeton J_1 a été choisi. On est donc presque sûr que la boucle s'arrête.

3. Si on choisit le jeton 2 alors on obtient la face 1 dès le premier lancer. Dans le cas contraire les lancers sont analogues à la question précédente :

```
VAR
   jeton,lancer,Y : integer ;
BEGIN
   Y := 1 ; jeton := random(2)+1 ;
   IF (jeton=1) THEN
         Begin
            REPEAT
```