Devoir Maison N°15

Intégration 2 sur un intervalle quelconque

extrait d'Eml 2013

1. Vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, et que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ converge.

   On note $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$.
3. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$. En déduire : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
4. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Soit $0 < x \leq y$. Montrer que $f(x) \geq f(y)$. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. *bonus :* Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$.
   (On pourra écrire $\frac{1}{x}$ sous la forme d'une intégrale).
   En déduire que : $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
7. Soit $(x,h) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ converge.
   (b) Établir : $\forall t \in [0;+\infty[,\quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.
   (c) En déduire : $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.
8. En déduire que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$

Corrigé

1. cf cours : poser $X > 0$. Alors $\int_0^X e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^X = 1 - e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$. Conclure

2. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car $x > 0$ donc le dénominateur ne s'y annule pas) donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Or $\forall t \geq 0$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{x}e^{-t}$, et on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, donc d'après le critère par comparaison, l'intégrale de départ converge.

3. Soit $x > 0$. D'après la relation de Chasles, $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ car pour tout $t \geq 0$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq 0$. Puis, si $t \in [0, 1]$, $-t \geq -1$ d'où $e^{-t} \geq e^{-1}$ et comme $0 \leq 1$, $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$. On obtient bien $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt = e^{-1}[\ln|x+t|]_0^1 = e^{-1}\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
   Par comparaison, $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Soit $x > 0$. On a montré en 2. : $0 < \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{x}e^{-t}$ d'où par intégration (toutes les intégrales en jeu convergent bien), $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{x}[-e^{-t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Le théorème d'encadrement permet alors de conclure : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Soit $0 < x \leq y$. Alors pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 < x + t \leq y + t$ d'où $\frac{1}{x+t} \geq \frac{1}{y+t}$ et $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-t}}{y+t}$, d'où le résultat par intégration : $f(x) \geq f(y)$. On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. *bonus :* Soit IPP, soit par les critères : $t \to te^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc intégrale impropre en $+\infty$. Puis $te^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ car $t^3e^{-t} \to 0$ en $+\infty$ (croissances comparées) Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (2>1), d'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} te^{-t}dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge.
   Puis d'après la question précédente, on sait que $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$, d'où $f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$ $= \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x})dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{-t}{(x+t)x}dt$. Puis d'après l'inégalité triangulaire, (toutes les intégrales cv absolument) $|f(x) - \frac{1}{x}| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{-t}{(x+t)x}dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-t}\frac{-t}{(x+t)x}|dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t}{(x+t)x}dt.$
   Or $(x + t)x \geq x^2$ d'où $e^{-t}\frac{t}{(x+t)x} \leq e^{-t}\frac{t}{x^2}$ et finalement $|f(x) - \frac{1}{x}| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t}{x^2}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt.$
   Il reste à montrer que $\frac{f(x)}{1/x} = xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   (Attention, le résultat n'était pas immédiat ! : $f(x) - g(x) \to 0$ n'implique pas $f(x) \sim g(x)$!)
   Or pour $x > 0$, $|xf(x) - 1| = x|f(x) - \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt \in \mathbb{R}$. Conclure.

7. **Question technique mais fréquente dans les épreuves EML !**

   (a) $t \to \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{x^2}e^{-t}$.
   Conclure avec le critère de comparaison.

   (b) $$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\frac{-1}{(x+h+t)(x+t)} + \frac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}\right|$$
   $$= \frac{|h|}{|x+h+t|(x+t)^2} \leq \frac{|h|}{|x+h+t|x^2} \text{ car } (x+t)^2 \geq x^2.$$
   Puis $x + h + t \geq x + h \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \geq 0$ d'où $\dfrac{1}{|x+h+t|} = \dfrac{1}{x+h+t} \leq \dfrac{2}{x}$. Conclure.

   (c) $$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{1}{h}\left[\frac{e^{-t}}{x+h} - \frac{e^{-t}}{x}\right]dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right|$$
   $$= \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right]dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right|dt$$
   d'après l'inégalité triangulaire
   $$\leq \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{2|h|}{x^3}dt \text{ [d'après (b)]} = \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{2|h|}{x^3} \text{ puisque } \int_0^{+\infty} e^{-t} = 1.$$

8. $\dfrac{2|h|}{x^3} \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le théorème d'encadrement (et par 6.(c)) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$
   càd $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$. Donc le taux d'accroissement en x de la fonction f admet une limite en $h \to 0$, donc f est dérivable en x et $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$. Vrai pour tout $x > 0$, d'où le résultat.

FIN