Devoir Maison N°16

Probas à densité

Exercice 1 : Extrait EDHEC 2012

Soit λ, un réel strictement positif et f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.

1. (a) Montrer que f est paire.
   (b) Établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.
   (c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
2. Déterminer la fonction de répartition, notée F_X, de la variable aléatoire X.
3. (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$.
   (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.
4. Montrer que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
5. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
   (a) Exprimer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y en fonction de F_X.
   (b) Vérifier que Y est bien une variable à densité.
   (c) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ. Préciser l'espérance de Y.
6. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$.
   (a) Rappeler la fonction de répartition de la variable U.
   (b) On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Reconnaître la loi de W.
   (c) A l'aide de la syntaxe `rand()`, en déduire un script en Scilab pour simuler la variable Y.
   (d) Ecrire alors un script en Scilab pour simuler la variable X. (*On pourra utiliser la question 4.*)

Exercice 2: Extrait EML 2004

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires seront définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$, et ce, indépendamment de sa position à l'instant d'avant.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

1. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   (b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
   (c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
   (d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
3. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile.
   (a) Déterminer pour tout $i \geqslant j$, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.
   (b) Établir que : $\forall i \leqslant j - 1, \quad P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$
   (c) Écrire, pour tout entier naturel $j \geq 2$, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
4. On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',a,b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a, b]\!]$.
   (a) Écrire des commandes `Scilab` calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n^{e} déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.
   (b) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n = 0, a = 0
while a < 2
n = n+1
if grand(1,1,'uin',0,n) == 0 then
a = a+1
if a == 1 then, y=n,end
end
end
disp(...,'y=')
disp(...,'z=')
```

Corrigé

Exercice 1 :

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \lambda |-x| e^{-\lambda(-x)^2} = f(x)$. Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.
   (b) $x \mapsto f$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $M > 0$.
   $\int_0^M \lambda |x| e^{-\lambda x^2} dx = \int_0^M \lambda x e^{-\lambda x^2} dx = [\frac{-1}{2} e^{-\lambda x^2}]_0^M = -\frac{1}{2} e^{-\lambda M^2} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ D'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$
   (c) Par parité on a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et vaut $2 \times \frac{1}{2} = 1$. De plus, f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. D'où f est une densité de probabilité.
2. Soit $x < 0$. Alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_{-\infty}^{x} -\lambda t e^{-\lambda t^2} dt = \frac{1}{2} e^{-\lambda x^2}$ car $\int_A^x -\lambda t e^{-\lambda t^2} dt = [\frac{1}{2} e^{-\lambda t^2}]_A^x$
   $= \frac{1}{2} e^{-\lambda x^2} - \frac{1}{2} e^{-\lambda A^2} \underset{A \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} e^{-\lambda x^2}$. Puis si $x \geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\lambda x^2}) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x^2}$ d'après les calculs de la question 1.
3. (a) Critère : $x^2 e^{-\lambda x^2} = o(\frac{1}{x^2})$ (faire le quotient, avec croissances comparées, car $\lambda > 0$). De plus $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc d'après le critère par comparaison pour les fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$, converge. (Ou faire une IPP, mais plus long !)
   (b) Et comme la fonction $x \longmapsto x f(x)$ est positive sur $[0, +\infty[$, la convergence est absolue. De plus, $x \mapsto x f(x)$ est négative sur $\mathbb{R}^-$, donc par linéarité, la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx$ revient à la convergence, et comme $x \mapsto x f(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge absolument et est nulle. X a une espérance et $E(X) = 0$.
4. $P(X \leq 0) = F(0) = \frac{1}{2}$ d'où $P(X \geq 0) = 1 - P(X \leq 0)$ (car X est à densité) $= 1 - F(0) = \frac{1}{2}$.
5. On pose $Y = X^2$
   (a) $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Donc pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$. Puis pour $x \in \mathbb{R}^+$, $P((Y \leq x) = P\left(X^2 \leq x\right) = P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right)$. Conclure à l'aide d'une accolade
   (b) comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composée F_Y est continue sur $[0, +\infty[$, et C^1 sur $]0, +\infty[$ (attention au pb de la racine) et est nulle donc continue et C^1 sur $]-\infty, 0[$. Il reste la continuité à gauche de F_Y en 0 : $F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0$ et pour $x < 0$, $F_Y(x) = 0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = F_Y(0)$.
   (c) Une densité est $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \text{ par parité } = \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda \sqrt{x} e^{-\lambda(\sqrt{x})^2} = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$.
6. (a) $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
   (b) $U(\omega) = [0, 1[$ d'où $W(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(W \leq x) = \left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq x\right) = P(1 - U \geq \exp(-\lambda x)) =$
   $P(U \leq 1 - \exp(-\lambda x)) = F_U(1 - \exp(-\lambda x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq 1 - e^{-\lambda x} < 1 \\ 1 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ car $1 - e^{-\lambda x} > 1 \Leftrightarrow 0 > e^{-\lambda x}$ impossible, etc. ... D'où $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$
   (c) `Y=-1/lambda * log(1-rand())`
   (d) `if rand()<0.5 then, X=sqrt(Y), else X=-sqrt(Y)`

Exercice 2 :

1. $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en$+\infty$. On peut aussi remarquer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge et vaut $\pi/2$: en effet, $\int_0^A \frac{1}{1+t^2}dt = [arctant]_0^A = arctan(A) - 0 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$.
   Or pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, $e^{-xt} \leq 1$ d'où $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ (ou utiliser =o()). D'après le critère par comparaison pour les fonctions continues positives, on en déduit que B_0 est bien définie sur $[0,+\infty[$. De plus, $B_0(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$ d'après ce qui précède.
2. Soit $0 \leq x \leq y$. Alors pour tout $t \geq 0$, $-xt \geq -yt$ d'où $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-yt}}{1+t^2}$ et par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales convergent d'après 1.) : $B_0(x) \geq B_0(y)$. On en déduit bien que B_0 est décroissante sur $[0,+\infty[$.
3. (a) cf cours
   (b) $t \geq 0 \Rightarrow 1+t^2 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$, d'où $0 \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$. Théorème d'encadrement : $B_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Critère : par exemple, montrer à l'aide des croissances comparées que $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} = o(\frac{1}{1+t^2})$, ou $=o(\frac{1}{t^2})$ ...
5. (a) Taylor Lagrange à l'ordre 1, appliquée à $f : x \mapsto e^x$ de classe C^∞ entre 0 et $u \in \mathbb{R}$:
   $|e^u - 1 - u| \leq \frac{|u|^2}{2}M$, avec $M = \underset{x\in[0,u]}{max}|f''(t)|$ (qui existe bien car f'' continue sur le segment d'extrémités 0 et u). Il reste à montrer que $M \leq e^{|u|}$ (car $|u|^2 = u^2$)).
   Si $u \geq 0$: $0 \leq x \leq u \Rightarrow e^x \leq e^u = e^{|u|}$ donc dans ce cas, on a bien $M \leq e^{|u|}$.
   Si $u < 0$: $u \leq x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x \leq e^{|u|}$ (car $|u| \geq 0$). Dans ce cas, on a aussi $M \leq e^{|u|}$.
   Dans tous les cas, $M \leq e^{|u|}$, d'où le résultat.
   (b) On applique le (a) à $u = -ht$: $|e^{-ht} - 1 + ht| \leq \frac{h^2}{2}t^2 e^{|-ht|}$, puis on multiplie par $\frac{1}{1+t^2}t^k e^{-xt} \geq 0$:
   $|\frac{t^k e^{-xt}e^{-ht}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} + h\frac{t^{k+1}e^{-xt}}{1+t^2}| \leq \frac{h^2}{2}\frac{t^{k+2}e^{|h|t}e^{-xt}}{1+t^2}$ car $|-ht| = |ht| = |h|t$ (on a $t \geq 0$).
   (c) d'où $|\frac{t^k e^{-(x+h)t}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} + h\frac{t^{k+1}e^{-xt}}{1+t^2}| \leq \frac{h^2}{2}\frac{t^{k+2}e^{-((x-|h|)t}}{1+t^2} \leq \frac{h^2}{2}\frac{t^{k+2}e^{-(\frac{x}{2}t}}{1+t^2}$ car $|h| \leq \frac{x}{2} \Rightarrow x - |h| \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow e^{-(x-|h|)t} \leq e^{-\frac{x}{2}t}$. On intègre l'inégalité obtenue, en utilisant l'inégalité triangulaire :
   $|B_k(x+h) - B_k(x) + hB_{k+1}(x)| \leq \frac{h^2}{2}B_{k+2}(x)$. Il reste à diviser par $|h| > 0$, en utilisant la formule $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$:
   $|\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)| \leq \frac{h^2}{2|h|}B_{k+2}(x)$. Pour finir, on remarque alors que $\frac{h^2}{|h|} = \frac{|h|^2}{|h|} = |h|$ d'où le résultat voulu.
   (d) Théorème d'encadrement, $h \to 0$. Comme x est fixé, indépendant de h : $\frac{|h|}{2}B_{k+2}(\frac{x}{2}) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$
   d'où $\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ et finalement, $\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} -B_{k+1}(x) \in \mathbb{R}$. Donc par définition, B_k est dérivable en $x \in]0,+\infty[$, et $B'_k(x) = -B_{k+1}(x)$. Vrai pour tout $x > 0$.
   (e) Comme $B'_0 = -B_1$ et que B_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que B_0 est deux fois dérivable, et $B''_0 = -B'_1 = B_2$ donc est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc B_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $B''_0(x) + B_0(x) = B_2(x) + B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)e^{-xt}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.
6. (a) Soit $x > 0$. Comme $e^{-xt} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, on obtient l'inégalité de droite. Pour celle de gauche : d'après la relation de Chasles, $B_0(x) = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \geq \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ car la deuxième intégrale est positive (l'intérieur est positif, les bornes sont dans le bon sens). Puis $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow -tx \geq -\sqrt{x} \Rightarrow e^{-tx} \geq e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}$ d'où $B_0(x) \geq \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}dt = e^{-\sqrt{x}}\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$.
   (b) Théorème d'encadrement : comme $x \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$, et $e^{-\sqrt{x}}\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}dt = arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}) \to e^0\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. D'où $B_0(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} = B_0(0)$. B_0 est bien continue en 0.
   (c) D'après 5.(e), $B''_0(x) = \frac{1}{x} - B_0(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$. Asymptote verticale. B''_0 ne peut être continue en 0, donc B_0 ne peut pas être de classe C^2 en 0. (En fait, on pourrait montrer que B_0 n'est même pas dérivable en 0 ...)

Fin