Devoir Maison N$^\circ$3

Ensembles-Applications

17 octobre 2018

Sergeï Natanovich Bernstein (1880-1968)

Mathématicien ukrainien. Il étudie à Paris, docteur de la Sorbonne, mais obligé de recommencer un cursus en Russie, pour obtenir les diplômes qui donnent le droit d'enseigner. Dans sa thèse de doctorat il résout le 19e problème de Hilbert.
Ses travaux portent sur l'approximation des fonctions et la théorie des probabilités.

Exercice 1 :

On pose pour tout réel x tel que

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

1. (a) Vérifier que f est impaire.
   (b) Donner les variations et le graphe de f.
   On précisera les limites.
2. (a) Justifier que f realise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
   (b) Donner l'expression de f^{-1} à l'aide de la fonction logarithme.
   (c) Tracer le graphe de f^{-1}.
   (d) Donner l'équation de la tangente à f^{-1} en 0.
3. Justifier que pour tous réels a, b, on a

$$f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}.$$

4. En déduire que pour tous $x, y \in]-1,1[$:

$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[.$$

Exercice 2. (*) *Dans une école de commerce..*
Une association compte 9 étudiants de première année, 10 étudiants de deuxième année, et 3 étudiants de troisième année.

1. Cette association doit choisir un comité représentatif constitué d'un étudiant de première année, d'un de deuxième année, et d'un de troisième année.
   Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. On reprend les hypothèses précédentes mais on suppose maintenant que le comité doit être constitué de quatre étudiants, sachant qu'il faut, comme auparavant, au moins un étudiant de chaque année.
   Combien y a-t-il de comités possibles ?

Exercice 3. (**) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Préciser les variations de f. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera.
4. Expliciter f^{-1}.
5. Écrire un programme Scilab qui prend en argument un réel positif a et renvoie le graphe de f sur $[-a, a]$.
6. Modifier le programme pour afficher le graphe de f^{-1}.

Exercice 4. (***)
Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, deux applications. Vérifier que :

1. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 5. (*** facultatif).
Soient E deux parties non-vides d'un ensemble E. On définit l'application $f : \mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \mapsto (\mathrm{A}\cup\mathrm{M}, \mathrm{B}\cup\mathrm{M}) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B})$.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \varnothing$.