Devoir Maison N°3

Ensembles-Applications

Corrigé

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -f(x).$$

En conclusion, f est impaire.

(b) On a pour tout réel x

$$f(x) = \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{-2x}+1-2}{e^{-2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{-2x}+1}.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (dont le dénominateur ne s'annule pas). Pour tout réel x :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0.$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Sachant que $e^{2x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Par imparité de f, on a aussi
$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. (a) f est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$. Le théorème de la bijection s'applique, f est bien bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$..

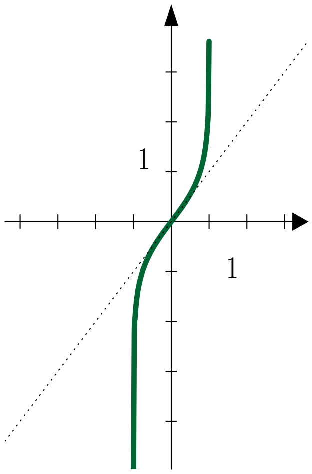
(b) Soit $y \in]-1,1[$. On résout l'équation d'inconnue x

$$f(x) = y \iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \iff 1-\frac{2}{e^{2x}+1} = y \iff \frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{1-y}{2} \iff 1+e^{2x} = \frac{2}{1-y} \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}.$$

Par bijectivité de la fonction exponentielle, on a

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = f^{-1}(x).$$

(c) Pour le graphe de f^{-1}, il suffit de faire la symétrie d'axe $y = x$.



(d) L'équation de la tangente à f^{-1} en 0 est :

$$y = (f^{-1})'(0)(x-0) + f^{-1}(0) = x.$$

En effet, f^{-1} est dérivable te un calcul de dérivée donne $(f^{-1})'(0) = 1$. De plus $f(0) = 0$ impose $f^{-1}(0) = 0$.

3. Soient a, b deux réel, on a

$$\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} = \frac{\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} + \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}}{1 + \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}} = \frac{(e^{2a}-1)(e^{2b}+1)+(e^{2b}-1)(e^{2a}+1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)+(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}$$

$$= \frac{(e^{2(a+b)} - e^{2b} + e^{2a} - 1) + (e^{2(a+b)} - e^{2a} + e^{2b} - 1)}{(e^{2(a+b)} + e^{2b} + e^{2a} + 1) + (e^{2(a+b)} - e^{2b} - e^{2a} + 1)} = \frac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1} = f(a+b).$$

4. Soient $x, y \in]-1,1[$. Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$, il existe deux réels a et b tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Ainsi

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} = f(a+b) \in]-1,1[.$$

Solution 2.

1. Pour choisir un comité, on peut :
— choisir l'étudiant de $1^{\text{ère}}$ année ; cela fait 9 possibilités ;
— puis choisir l'étudiant de $2^{\text{ème}}$ année ; cela fait 10 possibilités ;
— enfin choisir l'étudiant de $3^{\text{ème}}$ année ; cela fait 3 possibilités.
Au total, il y a $9 \times 10 \times 3 = \boxed{270}$ possibilités ; c'est le nombre de comités possibles.

2. Un comité avec les nouvelles hypothèses aura deux étudiants d'une même année, et un de chacune des deux années restantes.
• Pour choisir un comité avec deux étudiants de première année, on peut d'abord choisir ces deux étudiants parmi les 9 possibles (cela fait $\binom{9}{2}$ possibilités), puis l'étudiant de $2^{\text{ème}}$ année (10 possibilités), puis celui de $3^{\text{ème}}$ année (3 possibilités), ce qui fait un total de $\binom{9}{2} \times 10 \times 3 = 1080$ possibilités.

- De même, le nombre de comités comprenant deux étudiants de $2^{\text{ème}}$ année est $9 \times \binom{10}{2} \times 3 = 1215$.

- Et de même, le nombre de comités comprenant deux étudiants de $3^{\text{ème}}$ année est $9 \times 10 \times \binom{3}{2} = 270$.

Finalement, le nombre total de comités possibles est $1080 + 1215 + 270 = \boxed{2565.}$

Solution 3.

1. f est paire. On peut limiter l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$
Par composition, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On peut conclure que f est injective par stricte monotonie.
3. Précisons les limites en $\pm\infty$.
$$f(x) \underset{x \geqslant 0}{=} 1 - \frac{1}{1+x} \to_{+\infty} 1^- \quad \text{et} \quad f(x) \to_{-\infty} -1 \quad \text{par imparité.}$$
Par le théorème de la bijection (f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone), f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $]-1,1[$.
4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times]-1,1[$, on a les équivalences en distinguant pour x positif et x négatif. Pour $x \geqslant 0$,
$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x} = y \iff 1 - \frac{1}{1+x} = y \iff \frac{1}{1+x} = 1-y \iff 1+x = \frac{1}{1-y} \iff x = \frac{y}{1-y}.$$
Pour, x négatif, on a
$$f(x) = y \iff \frac{x}{1-x} = y \iff \frac{1}{1-x} - 1 = y \iff \frac{1}{1-x} = 1+y \iff 1-x = \frac{1}{1+y} \iff x = \frac{y}{1+y}.$$
On résume
$$f^{-1} : y \in]-1,1[\mapsto \frac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}.$$
5.
```
function graphe(a)
x=linspace(-abs(a),abs(a),200)
y=x./(1+abs(x))
plot(x,y)
endfunction
```
6. Comme le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à l'axe d'équation $y = x$. Il suffit d'échanger le rôle de x et y.
7.
```
function graphereciproque(a)
x=linspace(-abs(a),abs(a),200)
y=x./(1+abs(x))
plot(y,x)
endfunction
```

Solution 4.

1. Soient $y, y' \in \mathrm{F}$, tels que $g(y) = g(y')$, montrons que $y = y'$.
Comme f est surjective, il existe $x, x' \in \mathrm{E}$ tels que

$$f(x) = y \quad \text{et} \quad f(x') = y'.$$

Par suite,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x').$$

Par injectivité de $g \circ f$, on a $x = x'$. Puis,

$$y = f(x) = f(x') = y'.$$

On a prouvé l'injectivité de g.

2. Soit $y \in \mathrm{F}$, montrons qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$.
On pose $z = g(y) \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de $g \circ f$, on a l'existence de $x \in \mathrm{E}$ tel que

$$g \circ f(x) = z.$$

Il vient,

$$g(f(x)) = z \quad \text{et} \quad g(y) = z.$$

Par injectivité de g, il vient $f(x) = y$.
Ceci étant valable pour tout $y \in \mathrm{F}$, on a prouvé la surjectivité de f.

Solution 5. Attention coquille dans l'énoncé. On définit l'application

$$f : \mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \mapsto (\mathrm{A} \cap \mathrm{M}, \mathrm{B} \cap \mathrm{M}) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B}).$$

1. Raisonnons par double implication.

• Supposons f surjective et montrons que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
Considérons $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \varnothing) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B})$. Par surjectivité de f, il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ tel que

$$f(\mathrm{M}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \varnothing) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{M} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \cap \mathrm{M} = \varnothing.$$

On en déduit,

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{M}) = \mathrm{A} \cap \varnothing = \varnothing.$$

• Réciproquement, supposons $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et montrons que f est surjective.
Soient $(\mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B})$, montrons qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ tel que

$$f(\mathrm{M}) = (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \iff \mathrm{M} \cap \mathrm{A} = \mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{M} \cap \mathrm{B} = \mathrm{D}.$$

Graphiquement,

Le graphe suggère de poser $\mathrm{M} = \mathrm{C} \cup \mathrm{D} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ de sorte que

$$f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{C} \cup \mathrm{D}) = ((\mathrm{C} \cup \mathrm{D}) \cap \mathrm{A}, (\mathrm{C} \cup \mathrm{D}) \cap \mathrm{B}) = (\mathrm{C}, \mathrm{D}).$$

2. Raisonnons, de nouveau, par double implication.

• Supposons f injective, montrons que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$. Pour cela, remarquons que

$$f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = (\mathrm{A} \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}), \mathrm{B} \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \quad \text{et} \quad f(\mathrm{E}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{E}, \mathrm{B} \cap \mathrm{E}) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Par injectivité de f,

$$f(\mathrm{E}) = f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}.$$

• Supposons que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$, montrons que f est injective.
Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}' \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ tels que $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}')$, montrons que $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$. Or,

$$f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}') \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{M} = \mathrm{A} \cap \mathrm{M}' \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \cap \mathrm{M} = \mathrm{B} \cap \mathrm{M}'.$$

D'où,

$$\mathrm{M} = \mathrm{M} \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{M}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{M}') \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{M}') = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{M}' = \mathrm{E} \cap \mathrm{M}' = \mathrm{M}'.$$

D'où, l'injectivité de f.

Remarque. On peut conclure de cette étude que f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective. D'après les questions précédentes, c'est équivalent à

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}.$$

Autrement dit, $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}}$.

Fin