# Devoir Maison N°3

## Nombres Complexes

Niveau 2-3

**Exercice 1.** - Calculons vite et bien !

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z| + \overline{z} = 6 - 2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C} - \{2\}$ l'équation $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$.

**Exercice 2.** Soit un réel $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}.$$
2. En déduire, pour tout entier $n$, les valeurs respectives des sommes suivantes :
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
3. Montrer finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n\cos(x)C_{n-1}(x) - n\sin(x)S_{n-1}(x),$$
puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n2^{n-1}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Fin

# Corrigé Devoir Maison N$^\circ$ 3

## Nombres Complexes

## Proposition de solutions

**Solution 1** 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe donc $a$ et $b$ deux réels tels que $z = a + ib$. Alors,

$$\begin{aligned}
|z| + \overline{z} = 6 - 2i &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a - ib = 6 - 2i \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} + a - 6\right) + i(2-b) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + a - 6 = & 0 \\ 2 - b = & 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4} = 6 - a \\ 2 = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - a \geq 0 \text{ et } a^2 + 4 = (6-a)^2 \\ b = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 6 \text{ et } 12a = 32 \\ b = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a & = \frac{8}{3} \\ b & = 2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{Cette équation admet une unique solution : } \mathcal{S} = \{\frac{8}{3} + 2i\}.}$

2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{2\}$. On pose $Z = \frac{z-3i}{z+2}$. On a alors :

$$\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + 6Z + 13 = 0.$$

Résolvons alors cette équation d'inconnue $Z$. Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 < 0$ (et donc $\Delta = (4i)^2$). Il y a donc deux solution complexes :

$$Z_1 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i \text{ et } Z_2 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i.$$

On résout alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{z-3i}{z+2} = -3 - 2i \\
&\Leftrightarrow z - 3i = (-3-2i)z + 2(-3-2i) \\
&\Leftrightarrow z(4+2i) = -6 - i \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-6-i}{4+2i} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(-6-i)(4-2i)}{16+4} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-13+4i}{10}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Puis, de la même manière, on trouve :

$$\frac{z-3i}{z+2} = -3 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-19+8i}{10}.$$

Les deux complexes trouvés étant différents de 2, ce sont les solutions recherchées.

*Conclusion :* $\boxed{\text{L'équation étudiée admet deux solutions : } \mathcal{S} = \{\frac{-13+4i}{10}, \frac{-19+8i}{10}\}.}$

**Solution 2** 1. On a d'après la formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k = (e^{ix}+1)^n.$$

En utilisant la méthode de l'angle médian puis une formule d'Euler, on trouve

$$e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}.$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}.$$

2. On a, pour tout entier $n$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{R}e(e^{ikx}) = \mathcal{R}e\Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\Big] = \mathcal{R}e\left[2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}\right].$$

On trouve donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(x) = 2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Et de même (en considérant bien sûr la partie imaginaire) : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = 2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après la formule du chef puis le changement d'indice $[k' = k-1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\cos(kx) = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cos((k+1)x).$$

Or : $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}$, $\cos((k+1)x) = \cos(kx)\cos(x) - \sin(kx)\sin(x)$. En injectant cette égalité dans la précédente (et avec les notations de la question 2.), on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(kx) = n\cos(x)C_{n-1}(x) - n\sin(x)S_{n-1}(x).$$

(b) Ainsi on obtient d'après la question 2.,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(kx) &= n2^{n-1}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1}\left[\cos(x)\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right] &(3)\\ &= n2^{n-1}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right). &(4)\end{aligned}$$

FIN