Devoir Maison N$^\circ$4
Suites Numériques

22 Novembre 2018

Inégalité arithmético-géométrique et applications . On propose une démonstration par récurrence d'une inégalité classique appelée « inégalité arithmético-géométrique ». Elle énonce : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Le membre de gauche s'appelle *moyenne géométrique* des nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et le membre de droite s'appelle *moyenne arithmétique* des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $\langle\langle$ si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\rangle\rangle$$

Lorsque les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont égaux, l'inégalité devient une égalité. On montrera que l'inverse est aussi vrai.

(1) Etablir le cas $n = 2$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On considère donc $n+1$ réels positifs ou nuls $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ et on pose $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}$.

On suppose également, quitte à réordonner, que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n+1}$ et $a_1 < a_{n+1}$.

(a) Etablir l'inégalité $A(a_1 + a_{n+1} - A) - a_1 a_{n+1} > 0$.

(b) En appliquant l'hypothèse de récurrence avec les réels $a_2, a_3, \ldots, a_n$ et $a_1 + a_{n+1} - A$, montrer l'inégalité souhaitée et conclure le raisonnement.

(3) Dans cette question, on étudie le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. On montre ici que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls tels que $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ alors $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(a) Etablir le cas $n = 2$.

(b) Pour le cas général, on raisonne par contraposée, en supposant que les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne sont pas égaux, et quitte à réordonner, on peut supposer que $a_1 \neq a_2$.

Etablir, dans ce cas, que l'inégalité est stricte : $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

(4) La *moyenne harmonique* des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est $H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique avec des réels bien choisis, montrer que, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

(5) Montrer que si $u > 0, v > 0$ et $w > 0$, alors

$$u^3 + v^3 + w^3 \geq 3uvw$$

(6) Un parallelipipède rectangle a un volume de 216 cm^3 et une surface de 216 cm^2. Montrer qu'il s'agit d'un cube.