Corrigé

Inégalité arithmético-géométrique et applications. On propose une démonstration par récurrence d'une inégalité classique appelée « inégalité arithmético-géométrique ». Elle énonce : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Le membre de gauche s'appelle *moyenne géométrique* des nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et le membre de droite s'appelle *moyenne arithmétique* des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $\langle\langle$ si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\rangle\rangle$$

Lorsque les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont égaux, l'inégalité devient une égalité. On montrera que l'inverse est aussi vrai.

(1) Etablir le cas $n = 2$.

Soit $(a_1, a_2) \in [0, +\infty[^2$. On étudie le signe de $\dfrac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2}$:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0$$

d'où l'inégalité

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On considère donc $n+1$ réels positifs ou nuls $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ et on pose $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}$.

On suppose également, quitte à réordonner, que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n+1}$ et $a_1 < a_{n+1}$.

(a) Etablir l'inégalité $A(a_1 + a_{n+1} - A) - a_1 a_{n+1} > 0$.

On observe que

$$\begin{aligned} A(a_1 + a_{n+1} - A) - a_1 a_{n+1} &= a_1 A - a_1 a_{n+1} + (a_{n+1} - A)A \\ &= a_1(A - a_{n+1}) + (a_{n+1} - A)A \\ &= (a_{n+1} - A)(A - a_1) \end{aligned}$$

Puisque A est une moyenne des réels $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ et puisque $a_1 < a_{n+1}$, on $a_1 < A < a_{n+1}$ donc

$$A(a_1 + a_{n+1} - A) - a_1 a_{n+1} > 0$$

(b) En appliquant l'hypothèse de récurrence avec les réels $a_2, a_3, \ldots, a_n$ et $a_1 + a_{n+1} - A$, montrer l'inégalité souhaitée et conclure le raisonnement.

Les réels $a_2, a_3, \ldots, a_n$ et $a_1 + a_{n+1} - A$ sont positifs ou nuls donc par hypothèse de récurrence,

$$(a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot (a_1 + a_{n+1} - A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1 + a_{n+1} - A}{n} = A$$

Or $\dfrac{a_1 a_{n+1}}{A} < a_1 + a_{n+1} - A$ donc, par croissance de la fonction racine n^{e} :

$$(a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \frac{a_1 a_{n+1}}{A})^{\frac{1}{n}} \leq (a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot (a_1 + a_{n+1} - A))^{\frac{1}{n}}$$

et par conséquent

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n}} \leq A^{\frac{n+1}{n}}.$$

Enfin, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{n+1}{n}}$, il vient

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leq A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}$$

ce qui établit que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

. Cette démonstration est tirée de l'article *The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 5 (May, 1976)*

(3) Dans cette question, on étudie le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. On montre ici que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels positifs ou nuls tels que $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ alors $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(a) Etablir le cas $n = 2$.

Supposons que les réels positifs a_1, a_2 vérifient $\dfrac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2}$. D'après la question (1), il vient alors $\sqrt{a_1} = \sqrt{a_2}$ donc $a_1 = a_2$.

(b) Pour le cas général, on raisonne par contraposée, en supposant que les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne sont pas égaux, et quitte à réordonner, on peut supposer que $a_1 \neq a_2$.

Etablir, dans ce cas, que l'inégalité est stricte : $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

On suppose donc que les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne sont pas égaux et $a_1 \neq a_2$. On distingue deux cas : le cas où l'un des réels a_j est nul et le cas où aucun des réels n'est nul.

— Si l'un des réels a_j est nul alors l'inégalité est bien stricte puisque $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = 0$ et $0 < \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$

— Supposons maintenant qu'aucun des réels a_j n'est nul. Comme $a_1 \neq a_2$, d'après le cas d'égalité pour $n = 2$, on a

$$a_1 a_2 < \frac{(a_1 + a_2)}{4}$$

donc

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n}$$

et par l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n} \leq \frac{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + a_3 + \cdots a_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

ce qui justifie l'inégalité stricte puisque alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(4) La *moyenne harmonique* des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est $H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique avec des réels bien choisis, montrer que, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique avec les réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ on obtient

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

puis en passant aux inverses, et en tenant compte de l'égalité $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$ on trouve

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

(5) Montrer que si $u > 0, v > 0$ et $w > 0$, alors

$$u^3 + v^3 + w^3 \geq 3uvw$$

On considère des réels $u > 0, v > 0$ et $w > 0$. L'inégalité arithmético-géométrique appliquée avec les réels u^3, v^3 et w^3 donne

$$\sqrt[3]{u^3 v^3 w^3} \leq \frac{u^3 + v^3 + w^3}{3}$$

ou encore

$$3uvw \leq u^3 + v^3 + w^3.$$

(6) Un parallelipipède rectangle a un volume de 216 cm^3 et une surface de 216 cm^2. Montrer qu'il s'agit d'un cube.

Appelons x, y, z les longueurs des différents côtés de ce parallelipipède rectangle. Son volume est donc xyz et sa surface est $2(xy + yz + xz)$. Par hypothèse, on a

$$xyz = 216 \text{ et } xy + yz + xz = 108.$$

L'inégalité arithmético-géométrique appliquée avec les réels xy, yz, xz donne

$$\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} \leq \frac{xy + yz + zx}{3}.$$

Le membre de gauche est égal à $\sqrt[3]{(xyz)^2} = \sqrt[3]{216^2} = (3^3 \cdot 2^3)^{\frac{2}{3}} = 36$ et le membre de droite est égal à $\dfrac{xy + yz + zx}{3} = \dfrac{108}{3} = 36$: il y a donc égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique et par suite $x = y = z$. Ce parallelipipède rectangle est donc un cube.