Devoir Maison N°4 Bis
Suites Numériques

29 Novembre 2018

Exercice 1

Soit $a>0$. On définit la suite u par $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2u_n}(u_n-\sqrt{a})^2$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant\sqrt{a}$.
3. Montrer que u est monotone à partir du rang 1 et déterminer son sens de monotonie.
4. Montrer que la suite u est convergente.
5. Déterminer la limite de la suite u.
6. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-\sqrt{a}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2$.
7. À partir de maintenant, on pose $a=10$ et $u_0=4$. On souhaite calculer une valeur approchée de $\sqrt{10}$.
   a) Montrer que $u_1-\sqrt{10}\leqslant\dfrac{1}{4}$ *(comparer avec $u_1-\sqrt{9}$).*
   b) En utilisant la question 6, montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
   $$0\leqslant u_n-\sqrt{10}\leqslant\frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}.$$
   c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n-\sqrt{10}\leqslant\dfrac{8}{24^{2^{n-1}}}$.
   d) On admet que $\dfrac{8}{24^8}<10^{-9}$.
   Écrire un programme `Scilab` qui renvoie une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{10}$ à l'aide de la suite u *(renvoyer la valeur de u_n pour une valeur de n bien choisie d'après ce qui précède).*
   Le programme pourra commencer par `format(20)` pour augmenter la précision des calculs.

Exercice 2

On définit les deux suites réelles u et v par $u_1=1$, $v_1=12$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}\\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}\end{cases}$.

De plus on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n=v_n-u_n$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par w.
2. Déterminer une expression de w_n. En déduire la limite de w.
3. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
4. Déterminer les limites des suites en considérant la suite t définie par
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ t_n=3u_n+8v_n.$$

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \dfrac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n} = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$.

2. Par récurrence :
   - d'après la question précédente, $u_1 - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_0}(u_0 - \sqrt{a})^2 \geqslant 0$ donc $u_1 - \sqrt{a} \geqslant 0$;
   - supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a} > 0$; alors $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \geqslant 0$.

   Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + a - 2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{a - u_n^2}{2u_n} = \dfrac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n} \leqslant 0$. Donc la suite u est décroissante à partir du rang 1.

4. À partir du rang 1, la suite u est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

5. On a :
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$;
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$;
   - la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions continues ;

   alors on a $f(\ell) = \ell$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right) = \ell$ qui équivaut à $\dfrac{a - \ell^2}{\ell} = 0$ c'est-à-dire $\ell = \sqrt{a}$ puisque $\ell > 0$. $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}}$.

6. D'après la question 2, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ donc $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

   On obtient donc, avec la question 1, que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$.

7. **a)** Puisque $\sqrt{9} \leqslant \sqrt{10}$, $u_1 - \sqrt{10} \leqslant u_1 - \sqrt{9} = \dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{10}{u_0}\right) - 3 = \dfrac{13}{4} - 3 = \dfrac{1}{4}$.

   b) Déjà, d'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{10} \geqslant 0$.
   Pour la majoration, prouvons-la par récurrence :
   - pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{10} \leqslant \dfrac{1}{4}$ or $\dfrac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{1-1}}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$;
   - supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $u_n - \sqrt{10} \leqslant \dfrac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}$. Avec la question 6,

   $$u_{n+1} - \sqrt{10} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{10}}(u_n - \sqrt{10})^2 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{10}} \frac{(2\sqrt{10})^2}{\left((8\sqrt{10})^{2^{n-1}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^n}}.$$

   Par le principe de de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{10} \leqslant \dfrac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}$.

c) Il suffit de montrer que $2\sqrt{10} \leqslant 8$ et $8\sqrt{10} \geqslant 24$. Or $9 \leqslant 10 \leqslant 16$ donc, par croissante de la fonction $\sqrt{\ }$, $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$. On en déduit que $2\sqrt{10} \leqslant 8$ et $8\sqrt{10} \geqslant 24$. Alors, par croissance de la fonction $t \mapsto t^{2^{n-1}}$, $(8\sqrt{10})^{2^{n-1}} \geqslant 24^{2^{n-1}}$ donc $0 \leqslant u_n - \sqrt{10} \leqslant \dfrac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}} \leqslant \dfrac{8}{24^{2^{n-1}}}$.

d) D'après le résultat précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n - \sqrt{10} \leqslant \dfrac{8}{24^{2^{n-1}}}$ donc pour $n = 4$ on obtient $0 \leqslant u_4 - \sqrt{10} \leqslant \dfrac{8}{24^{2^3}} = \dfrac{8}{24^8} \leqslant 10^{-9}$. Cela signifie que u_4 est une valeur approchée de $\sqrt{10}$ à 10^{-9} près. Pour la calculer on peut écrire le programme suivant.

```
format(20);
u=4;
n=4;
a=10;
for i=0:n-1
    u=1/2*(u+a/u);
end
disp(u);
```

Exercice 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{4(u_n + 2v_n) - 3(u_n + 3v_n)}{12} = \dfrac{u_n - v_n}{12} = \dfrac{1}{12} w_n$.

On en déduit que la suite w est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$.

2. On a donc $\boxed{w_n = w_1 \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} = \dfrac{11}{12^{n-1}}}$.

Comme la raison de cette suite géométrique est dans $]-1, 1[$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \dfrac{2}{3}(v_n - u_n) = \dfrac{2}{3} w_n > 0$ étant donné l'expression de w_n. Donc la suite u est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4} = -\dfrac{w_n}{4} < 0$ donc la suite v est décroissante.

De plus nous avons vu que $v_n - u_n = w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc les suites u et v sont adjacentes.

4. Par le théorème des suites adjacentes, u et v convergent vers la même limite $\ell \in [u_1, v_1] = [1, 12]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n) + 6(u_n + 3v_n)}{3} = \frac{9u_n + 24v_n}{3} = 3u_n + 8v_n = t_n.$$

On en déduit que la suite t est constante, soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = t_1 = 99$.

De plus $t_n = 3u_n + 8v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3\ell + 8\ell = 11\ell$ donc $11\ell = 99$ c'est-à-dire $\ell = 9$.

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 9}$.

FIN