

Devoir Maison N°5

Fonctions Réelles

On considère un entier n strictement positif et on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. a) Etudier l'existence et la valeur de la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 b) Déterminer la limite de $f_n(x) - nx$ lorsque x tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Etudier l'existence et la valeur de la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
 b) Prouver que f_n admet une branche parabolique en $-\infty$, de direction l'axe des ordonnées.
3. a) Etudier les variations de f_n sur \mathbb{R} .
 b) Donner une allure de la courbe représentative de f_2 dans un repère orthonormé.
4. Montrer que l'équation $nx - e^{-x}$ admet une unique solution dans \mathbb{R} . On note u_n cette solution.
5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de $\exp(-u_n)$.
 b) Etudier le signe de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
 d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite.
 e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$

