Devoir Maison N°5
Corrigé

On considère un entier n strictement positif et on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. a) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par somme des limites, $f_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

b) On a $f_n(x) - nx = -e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Graphiquement, la courbe représentative de f_n admet donc une asymptote oblique d'équation $y = nx$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. Par différence (forme « $-\infty-\infty$ »), $f_n(x)$ admet donc $-\infty$ pour limite lorsque $x \to -\infty$.

b) On étudie la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque $x \to -\infty$. On a $\frac{f_n(x)}{x} = n + \frac{e^{-x}}{-x}$.
Or par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{y} = +\infty$ donc $\frac{f_n(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to -\infty$: la courbe représentative de f_n admet une branche parabolique en $-\infty$, de direction l'axe des ordonnées.

3. a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = n + e^{-x} > 0$. Le tableau de variation de f_n est donc le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b)

4. Il s'agit de prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on prouve que f_n est bijective sur $\mathbb{R}$ et que $0 \in f_n(\mathbb{R})$. On vérifie les hypothèses du théorème de la bijection :

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Aux bornes de l'intervalle on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi f_n réalise une bijection $\mathbb{R}$ dans $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ donc il existe bien un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(u_n) = nu_n - \exp(-u_n) = 0$ donc $u_n = \frac{\exp(-u_n)}{n}$.

b) D'après l'égalité précédente, puisque exp est strictement positive, on a $u_n = \frac{\exp(-u_n)}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparons $f_n(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$:

- On sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
- Cherchons le signe de $f_{n+1}(u_n)$. On a :
  $f_{n+1}(u_n) = (n+1)u_n - e^{-u_n} = (nu_n - e^{-u_n}) + u_n = f_n(u_n) + u_n = 0 + u_n = u_n > 0$.

Ainsi $f_{n+1}(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_n)$ ce qui impose, puisque f_{n+1} est croissante, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

d) La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite $l \geq 0$.
Montrons que $l = 0$. Par l'absurde, si $l > 0$ alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus $\exp(-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-l)$. Par somme des limites on aurait donc $nu_n - \exp(-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est impossible puisque l'on sait par ailleurs que $nu_n - \exp(-u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nu_n = \exp(-u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (en utilisant la continuité de exp en 0 et le fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).