Devoir Maison N°6

Intégration sur un segment

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2-1}{4}-\frac{1}{2}\ln x$$

(1) Pour tout $x\in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(2) Soit $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$. Simplifier la somme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(3) Soit $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$. Montrer que

(a) pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(b) puis que

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

(4) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)=-1$

Exercice 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

(1) Etablir l'encadrement $\displaystyle 0\leq U_n\leq\frac{\ln 2}{n+1}$ et en déduire que la suite (U_n) est convergente vers une limite à préciser.

(2) Calcul de U_1.

(a) En remarquant $\displaystyle\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer U_1.

(3) Pour tout $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$. Simplifier la somme $S_n(x)$ et en déduire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2)+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

(4) A l'aide d'une intégration par parties, établir l'expression suivante de U_n :

$$U_n=\frac{\ln(2)}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln(2)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

Corrigé

Exercice 1 :

(1) Pour tout $x \in]0,1[$, calculer $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$. En déduire $\lim_{x\to 0} \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t &= \int_x^1 \left(\frac{t^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln t\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\frac{t^3}{3}-t}{4} - \frac{1}{2}(t\ln t - t)\right]_x^1 \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\frac{x^3}{3}-x}{4} + \frac{1}{2}(x\ln x - x)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t =$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Simplifier la somme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(\frac{k}{n})^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{k}{n})^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4\times 6\times n^2} - \frac{n}{4} - \frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{24n} - \frac{n}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Montrer que

(a) pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a donc $0 < \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$.

La fonction f est décroissante sur $]0,1]$ donc pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et par positivité de l'intégrale,

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t$$

donc

(b) puis que
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

En sommant membre à membre, les encadrements précédents pour $1 \leq k \leq n-1$, on obtient
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Un changement d'indice dans le membre de gauche et l'application de la relation de Chasles pour l'intégrale donnent
$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Comme $f(1) = f(\frac{n}{n}) = 0$, on a
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}f(\frac{n}{n}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

ce qui donne la première moitié de l'encadrement désiré.
L'autre moitié s'obtient en additionnant $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ à chaque membre de l'inégalité
$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t.$$

(4) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$

D'après (3) et (4b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

donc
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} + \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} + \frac{1}{4}$$

D'une part,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\int_{x}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \text{ d'après le calcul en (2),}$$
$$\text{et } \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} = \lim\frac{2n^2}{24n^2} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

et d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x}{4} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc,
$$\lim\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$
$$= \lim\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} + \frac{1}{4}\right)$$

et, en vertu du théorème de convergence par encadrement,
$$\lim\frac{-1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{2}$$

Le résultat en découle.

Exercice 1 :

(1) Etablir l'encadrement $0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$ et en déduire que la suite (U_n) est convergente vers une limite à préciser.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a l'encadrement $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$ par croissance de la fonction ln, et puisque $x^n \geq 0$, on obtient ensuite

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$$

Par croissance de l'intégrale, il vient alors $0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\mathrm{d}x$ d'où l'encadrement

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

La suite (U_n) est encadrée par deux suites convergentes vers 0 donc $\lim U_n = 0$, d'après le théorème de convergence par encadrement.

(2) Calcul de U_1.

(a) En remarquant $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1-x^2}{1+x} = 1 - x$ donc $\dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{1}{1+x} - (1-x)$ et par suite

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \ln(2) - 1 + \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

(b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer U_1.

Pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & x & ; & u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) & = & \ln(1+x) & ; & v'(x) & = & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties

$$U_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$$

ce qui donne

$$U_1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(3) Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$. Simplifier la somme $S_n(x)$ et en déduire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$ est une somme géométrique de raison $-x \neq 1$ donc

$$S_n(x) = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}$$

donc après intégration sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(2) - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

et il reste à voir que $-(-1)^{n+1} = +(-1)^n$.

(4) A l'aide d'une intégration par parties, établir l'expression suivante de U_n :

$$U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$\begin{array}{lllllll} u'(x) & = & (n+1)x^n & ; & u(x) & = & x^{n+1} \\ v(x) & = & \ln(1+x) & ; & v'(x) & = & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Les fonctions $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties

$$(n+1)U_n = \int_0^1 (n+1)x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x = \left[x^{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

donc

$$(n+1)U_n = \ln(2) - \frac{-\ln(2) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}}{(-1)^n} = \ln(2) + \frac{\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}}{(-1)^n}$$

d'où le résultat $U_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$