Devoir Maison N°7

Polynômes

Mercredi le 17 Janvier 2019

Exercice 1:

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad$ et $\quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}$.
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et en déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de v sur I.
   (f) Montrer que : $\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x)$.
2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.
3. *facultatif : pour ceux qui veulent en faire plus*
   On pose pour tout entier naturel n, $a_n = \sin(\frac{\pi}{3\times 2^n})$ et $b_n = \cos(\frac{\pi}{3\times 2^n})$.
   (a) Justifier que pour tout réel θ, $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}$ et $b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$.

Exercice 2:

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$P_0(X) = 2$, $P_1(X) = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

1. Déterminer P_2 et P_3.
2. Rappeler précisémment les formules reliant $deg(P+Q)$ à $deg(P)$ et $deg(Q)$, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer le degré de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $\quad P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer un nombre complexe z de module 1 tel que $z + \frac{1}{z} = 2\cos t$.
   En déduire la valeur de $P_n(2\cos t)$ en fonction de n et t.
   (b) Résoudre, pour $n \geq 1$, l'équation $\cos(nt) = 0$ d'inconnue $t \in]0, \pi[$. Combien y a-t-il de solutions distinctes ?
   (c) *bonus* : En déduire les racines de P_n, pour $n \geq 1$. (Montrer qu'on les obtient bien toutes !)

FIN

Exercice 1: début Ecricome S 2015

1. (a) 1 est racine évidente, même au moins double (car $P'(1)=0$) donc P s'écrit $P(X)=(X-1)^2(aX+b)$ (si seulement racine écrire $P(X)=(X-1)(aX^2+bX+c)$, calculs un peu plus longs). Après identification des coefficients on trouve $P(X)=(X-1)^2(2X+1)$ (ou $P(X)=(X-1)(2X^2-X-1)$ puis calcul du Δ et factorisation du trinôme). Donc $P(x)$ du signe de $2x+1$.

   (b) u est somme de trois fonctions dérivables sur I, donc est dérivable sur I, et :
   $\forall x\in I,\quad u'(x)=\frac{1}{3}\left(2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)-1=\frac{1}{3}\left(\frac{2\cos^3 x+1-3\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)=\frac{P(\cos x)}{3\cos^2 x}$.

   (c) $u'(x)$ est du signe de $P(\cos x)$. Pour tout $x\in I$, $1>\cos x>0>\dfrac{-1}{2}$ donc $P(\cos x)>0$, $u'(x)>0$.

   (d) Notons que g est dérivable car quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Donc v est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables.
   Pour tout x de I, $g'(x)=\frac{3\cos x\times(2+\cos x)-3\sin x\times(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{6\cos x+3}{(2+\cos x)^2}$ d'où $v'(x)=1-g'(x)=\frac{(2+\cos x)^2-6\cos x-3}{(2+\cos x)^2}$ $=\frac{\cos^2 x-2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=\frac{Q(\cos x)}{(2+\cos x)^2}$ où $Q(X)=X^2-2X+1=(X-1)^2$.

   (e) Q est positif et ne s'annule qu'en 1, et, sur I, cos ne vaut jamais 1, donc v' est strictement positive sur I

   (f) Comme $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=0$, la stricte croissance de ces fonctions sur I induit leur stricte positivité. (**Attention**, la croissance ne suffisait pas donc bien vérifier $u'>0$ et $v'>0$ dans les questions précédentes).
   Donc $\forall x\in I,\qquad g(x)<x<f(x)$.

2. (a) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$. De même, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ et
   $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}=\frac{8-2\sqrt{12}}{4}=2-\sqrt{3}$.

   (b) En utilisant 1.(f) avec $x=\frac{\pi}{12}\in I$ (attention, $\pi\notin I$ donc impossible d'appliquer 1.(f) à π) : $g(\frac{\pi}{12})<\frac{\pi}{12}<f(\frac{\pi}{12})$
   d'où $12\times g(\frac{\pi}{12})<\pi<12\times f(\frac{\pi}{12})$ avec $g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=3\times\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=3\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
   et de même $f(\frac{\pi}{12})=\frac{1}{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2}+4-2\sqrt{3})$.

3. (a) Soit θ un réel. $\cos(2\theta)=\cos(\theta+\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$.

   (b) Soit n un entier naturel. Soit $\theta=\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}(\in[0,\pi/6[)$. Il fallait remarquer que $2\theta=\frac{2\pi}{3\times 2^{n+1}}=\frac{\pi}{3\times 2^n}$ D'où
   $\sqrt{\dfrac{1-b_n}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}}=\sqrt{\dfrac{2\sin^2\theta}{2}}=\sqrt{\sin^2(\theta)}=|\sin\theta|=\sin\theta=a_{n+1}$ puisque $\sin(\theta)>0$ ($\theta\in[0,\pi/6[$).
   De même, $\sqrt{\dfrac{1+b_n}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}}=\sqrt{\dfrac{2(1-\sin^2\theta)}{2}}=|\cos\theta|=\cos\theta=b_{n+1}$

   (c) En appliquant 1.(f) à $x=\theta\in I$ et en multipliant par 3×2^n, on a $9\times 2^n\dfrac{a_n}{2+b_n}<\pi<2^n\left(2a_n+\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Exercice 2 :

1. On calcule $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$ et $P_3 = XP_2 - P_1 = X^3 - 3X$. 2. cf cours !
3. On conjecture que le degré de P_n est n. Montrons-le par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Comme $P_0 = 2$, $\deg P_0 = 1$ et comme $P_1 = X$, $\deg P_1 = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $deg(P_n) = n$ et $\deg P_{n+1} = n+1$. Alors $\deg(XP_{n+1}) = n+2$ et $\deg(-P_n) = n$.
Comme $\boxed{n+2 \neq n}$, on en déduit que $\deg(XP_{n+1} - P_n) = \max(n+2, n) = n+2$, i.e. $\deg P_{n+2} = n+2$. Conclure.
4. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition "$\forall z \in \mathbb{C}^\star,\ P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$"
Initialisation : Comme P_0 est constant, on a pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$ (rappel : $z^0 = 1$).
Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $P_1(z + \frac{1}{z}) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$.
Hérédité : Supposons que pour un certain n : pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $P_n(z) = z^n + \frac{1}{z^n}$ et $P_{n+1}(z) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$. Alors d'après la relation de récurrence, pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $P_{n+2}(z + \frac{1}{z}) = (z + \frac{1}{z})P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) - P_n(z + \frac{1}{z})$
$=$[H.R.] $(z + \frac{1}{z})(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) - (z^n + \frac{1}{z^n}) = z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - (z^n + \frac{1}{z^n}) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}$. Conclure.
5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On cherche z sous la forme $z = e^{i\theta}$ (puisque z de module 1). Alors $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos(\theta)$ d'après les formules d'Euler. On en déduit que $\theta = t$ convient. Donc $z = e^{it}$ est solution.
On a alors $P_n(2\cos t) = P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n} = e^{int} + e^{-int} = 2\cos(nt)$.
   (b) On sait : $\cos nt = 0 \Leftrightarrow nt = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $nt = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow nt = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ($n \neq 0$).
Comme on cherche les solutions dans $]0, \pi[$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
Il y a n solutions distinctes.
   (c) Comme $P_n(2\cos t) = 2\cos(nt)$, on obtient en utilisant la question précédente que pour $t \in \mathcal{S}$, $P_n(2\cos(t)) = 0$ càd $2\cos(t)$ est racine de P_n. Donc on obtient n racines : $2\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}), k \in [\![0, n-1]\!]$, puisque ces racines sont bien distinctes (cos est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc injective ...).
De plus P_n est de degré n, donc il a au plus n racines : on les a bien toutes.

Exercice 3 `inspiré d'Ecricome E 2016`

1. Pour $n \geq 1$, g_n est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 + x > 0 \text{ et } (1+x)^2 \neq 0\} =]-1, +\infty[$. Puis pour tout $x > -1$, $(1+x)^2 \geq 0$, et $\ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1 + x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Donc pour n pair, g_n est positive sur $]-1, +\infty[$, et pour n impair, g_n est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sinon.
2. En -1, pas de F.I. : $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} (1+x)^2 = 0^+$ donc si n pair, $\lim\limits_{x\to-1} g_n(x) = +\infty$ et si n impair, $\lim\limits_{x\to-1} g_n(x) = -\infty$. En $+\infty$, avec $X = 1 + x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $g_n(x) = \dfrac{\ln(X)^n}{X^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées.
Graph. : asymptote verticale d'équation $x = -1$ et asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
3. g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \geq 0$, $g_n'(x) = \frac{n\frac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$
$= \frac{n(1+x)(\ln(1+x))^{n-1} - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}[n - 2\ln(1+x)]}{(1+x)^4}$ d'où le résultat.
4. Pour $x \geq 0$, $g_n'(x)$ est donc du signe de $n - 2\ln(1+x)$. Or $n - 2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2} - 1$.
Donc g_n admet un maximum en $e^{n/2} - 1$ de valeur $M_n = g_n(e^{n/2} - 1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = (\frac{n}{2})^n \frac{1}{e^n} = (\frac{n}{2e})^n$.
5. En $+\infty$, $\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = x^{3/2}\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{3/2}\frac{(\ln(1+x))^n}{x^2} = \frac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} = \frac{(\ln(X))^n}{(X-1)^{1/2}} \sim \frac{\ln(X)^n}{X^{1/2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées (avec $X = x + 1$ comme en 2.). Attention, composition des équivalents interdite !