

Préparation DS N° 5

Polynômes & Matrices

13 Février 2019

Durée 1 heures

Exercice 1 :

1) Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer M^3 puis en déduire que M n'est pas inversible.

2) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

a) Montrer que A n'est pas inversible.

b) Vérifier que $X^3 = 1 - (1 - X)(1 + X + X^2)$.

c) En remarquant que X^3 est un polynôme annulateur de A , montrer que $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

3) Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par ses trois premiers termes $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = -2$ et

la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $MX_n = X_{n+1}$. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n .

2) a) Calculer $(M - I)(M - 2I)(M - 3I)$

3) a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1} .

b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $MP = PD$.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n , les coefficients de la première ligne de M^n . Donner alors l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .

Corrigé

Exercice 1 :

$$1) M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc : $M^3 = 0$

Or, si M était inversible, on aurait alors la relation suivante :

$$M^3 M^{-1} = 0 \cdot M^{-1}$$

$$M^3 M^{-1} = 0$$

$$M^2 \cdot M \cdot M^{-1} = 0$$

$$M^2 = 0$$

Or, on a $M^2 \neq 0$. Par conséquent, M n'est pas inversible.

2) a) (grâce à 1.), on voit que si $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, M ne peut être inversible. De là, pour n'importe quelle matrice A vérifiant les propriétés $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$, A n'est pas inversible.

$$\begin{aligned} b) 1 - (1-x)(1+x+x^2) &= 1 - (1+x+x^2-x-x^2-x^3) \\ &= 1 - (1-x^3) = 1 - 1 + x^3 = x^3. \end{aligned}$$

On a donc bien : $x^3 = 1 - (1-x)(1+x+x^2)$

c) On note $P(X) = X^3$ un polynôme. On a donc :

$$P(A) = A^3 = 0.$$

X^3 est donc bien un polynôme annulateur de A .

Or, d'après 2. b), on sait que $X^3 = 1 - (1-X)(1+X+X^2)$.

On a donc : $A^3 = 0$

$$I - (I-A)(I+A+A^2) = 0$$

$$I = (I-A)(I+A+A^2)$$

Par conséquent, $I-A$ est bien inversible on a :

$$(I-A)^{-1} = I+A+A^2$$

3) Développons $(1+X)/(1-X+X^2)$:

$$(1+X)(1-X+X^2) = 1-X+X^2+X-X^2+X^3 = 1+X^3$$

On a donc : $(I+A)(I-A+A^2) = I+A^3$

Or, on sait que $A^3 = 0$ ce qui donne :

$$(I+A)(I-A+A^2) = I.$$

$I+A$ est donc bien inversible et on a :

$$(I+A)^{-1} = I-A+A^2$$

Exercice 2 :

$$1) M X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ 6U_n - 11U_{n+1} + 6U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_{n+3} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X_{n+1} = M X_n$$

Démontrons alors par récurrence la propriété $X_n = M^n X_0$.Initialisation : pour $n=0$ on a $X_0 = M^0 X_0 = X_0$.La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$.Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?D'après l'hypothèse de récurrence on a $X_n = M^n X_0$.D'après la première partie de la question on a $X_{n+1} = M X_n$.

$$X_n = M^n X_0$$

$$M X_n = M M^n X_0$$

$$X_{n+1} = M^{n+1} X_0$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété $X_n = M^n X_0$ est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

$$2) a) (M-1)(M-2I)(M-3I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \\ 18 & -27 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$ qui est un polynôme

annulation de M . Ses valeurs propres possibles sont donc racines de ce polynôme ce qui donne :

$$\lambda_p(M) = \{1, 2, 3\}$$

pour $\lambda = 1$ on a $MX_1 = X_1$

$$MX_1 - X_1 = 0$$

$$(M - I)X_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui donne } \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 6x - 11y + 5z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = y = z = 1$ pour résoudre ce système.

On a donc :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vecteur propre de M de valeur propre associée 1 avec $X \neq 0$.

pour $\lambda = 2$ on a $MX_2 = 2X_2$

$$MX_2 - 2X_2 = 0$$

$$(M - 2I)X_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -14 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui donne } \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 6x - 14y + 4z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ pour résoudre ce système.

On a donc :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vecteur propre de M de valeur propre associée 2 avec $X_2 \neq 0$.

pour $\lambda = 3$ on a $MX_3 = 3X_3$

$$MX_3 - 3X_3 = 0$$

$$(M - 3I)X_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -14 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ce qui donne } \begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6x - 14y + 3z = 0 \end{cases}$$

constructeur de M . Ses valeurs propres possibles sont donc racines de ce polynôme ce qui donne :

$$\text{Spec}(M) = \{1, 2, 3\}$$

pour $\lambda = 1$ on a $MX_1 = X_1$

$$MX_1 - X_1 = 0$$

$$(M - I)X_1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -11 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \text{ qui donne } \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 6x - 11y + 5z = 0 \end{array}$$

Il suffit alors de prendre $x = y = z = 1$ pour résoudre ce système.

On a donc :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vecteur propre de M de valeur propre associée 1 avec $X_1 \neq 0$.

pour $\lambda = 2$ on a $MX_2 = 2X_2$

$$MX_2 - 2X_2 = 0$$

$$(M - 2I)X_2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -14 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \text{ qui donne } \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 6x - 14y + 5z = 0 \end{array}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ pour résoudre ce système.

On a donc :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vecteur propre de M de valeur propre associée 2 avec $X_2 \neq 0$.

pour $\lambda = 3$ on a $MX_3 = 3X_3$

$$MX_3 - 3X_3 = 0$$

$$(M - 3I)X_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & -14 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \text{ ce qui donne } \begin{array}{l} -3x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6x - 14y + 3z = 0 \end{array}$$

Il suffit alors de prendre $x=1$, $y=3$ et $z=9$ pour résoudre ce système.

On a alors :

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

vecteur propre de M de valeur propre associée 3 avec $x_3 \neq 0$.

$$3) a) PQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 6 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & 8 & -2 \\ 1 & 9 & 9 & 12 & -3 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

On a :

$$PQ = 2I$$

$$P^{-1}Q = I$$

Peut donc être inversible et :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}Q$$

$$b) MP = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 6 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \end{array} \right)$$

$$PD = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \end{array} \right)$$

On a donc bien :

$$MP = PD$$

c) D'après 3. b) on a $MP = PD$ et d'après 3. a), P est inversible. On a donc :

$$MP = PD$$

$$MP^{-1} = PDP^{-1}$$

$$M = PDP^{-1}$$

M est bien diagonalisable

4. a) Procédure par récurrence.

Initialisation: pour $n=0$ on a $M^0 = P D^0 P^{-1}$; $P P^{-1} = I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$.

Hérédité: Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il du rang suivant?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $M^n = P D^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} M^n &= P D^n P^{-1} \\ M \cdot M^n &= M P D^n P^{-1} \\ M^{n+1} &= P D P^{-1} P D^n P^{-1} \\ M^{n+1} &= P D D^n P^{-1} \end{aligned}$$

$$M^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$$

Conclusion: Par récurrence la propriété est bien vraie pour tout n entier ou rang suivant.

b) D'après 4. a) on a $M^n = P D^n P^{-1}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La première ligne de M est donc:

$$\frac{1}{2} (6 - 6 \times 2^n + 2 \times 3^n - 5 + 8 \times 2^n - 3 \times 3^n \quad 1 - 2 \times 2^n + 3^n)$$

D'après 1), on a $X_n = M^n X_0$ donc:

$$u_n = \frac{1}{2} (6 - 6 \times 2^n + 2 \times 3^n - 5 + 8 \times 2^n - 3 \times 3^n \quad 1 - 2 \times 2^n + 3^n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



