Devoir Maison N°9
Espaces Vectoriels (I)

13 Février 2019

■ **Sous-espaces vectoriels.** Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

Question. $E=\mathbb{R}^3, \quad F=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 | 2x-y=z\right\}$

Question. $E=\mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad F=\{u\in E| \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=u(0)\}$

Question. $E=\mathbb{R}[X], \quad F=\{P\in E|P(-1)=P(1)\}$

Question. $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E|\lim nu_n=0\}$

Question. $E=\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad F=\left\{u\in E| \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x=u(0)\right\}$

■ **Familles libres, familles liées**

Question. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

La famille $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ est-elle libre ? liée ?

Question. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}i\\-i\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1+i\end{pmatrix}$$

La famille $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ est-elle libre ? liée ?

Question. On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit f,g et h les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x} \quad ,g(x)=x\mathrm{e}^{-x} \quad ,h(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$$

La famille (f,g,h) est-elle libre ? liée ?

Question. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes

$$P_1(X)=X^2+1, \quad P_2(X)=X^2+X+1, \quad P_3(X)=1-X$$

La famille (P_1,P_2,P_3) est-elle libre ? liée ?

Question. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère, pour $0 \leq k \leq n$, les polynômes

$$P_k(X) = (X-1)^k$$

La famille $(P_k)_k$ est-elle libre ? liée ?

■ Familles génératrices.

Question. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes

$$P_1(X) = X^2 + 1, \quad P_2(X) = X^2 + X + 1, \quad P_3(X) = 1 - X$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Question. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

La famille $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ est-elle génératrice de $\mathbb{C}^3$?

Question. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle relation doivent vérifier les réels a et b pour que $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_3)$?

Fin

Corrigé

■ **Sous-espaces vectoriels.** Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

Question.

$$E=\mathbb{R}^3,\quad F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3|2x-y=z\right\}$$

Comme $2\times 0-0=0$, le vecteur $\vec{0}\in F$.

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\quad v=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de F.

Le vecteur $\lambda u+v$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x+x'\\\lambda y+y'\\\lambda z+z'\end{pmatrix}$ et

$$2(\lambda x+x')-(\lambda y+y')=\lambda(2x-y)+(2x'-y')=\lambda z+z'$$

puisque $2x-y=z$ et $2x'-y'=z'$.

Ainsi, F est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Question.

$$E=\mathcal{C}(\mathbb{R}),\quad F=\{u\in E|\lim_{x\to+\infty}u(x)=u(0)\}$$

Notons θ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

C'est une fonction continue.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=0=\theta(0)$, la fonction $\theta\in F$.

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $u,\ v$ deux fonctions de F. Donc $\lim_{x\to+\infty}u(x)=u(0)$ et $\lim_{x\to+\infty}v(x)=v(0)$. D'après les règles sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty}(\lambda u+v)(x)=(\lambda u+v)(0)$$

Comme les fonctions u,v sont continues, la fonction $\lambda u+v$ est elle aussi continue. Donc $\lambda u+v\in F$. Ainsi, F est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Question.

$$E=\mathbb{R}[X],\quad F=\{P\in E|P(-1)=P(1)\}$$

Comme $(-1)^2=1^2$, le polynôme X^2 appartient à F (on peut aussi utiliser le polynôme nul si on veut...) donc F est non vide.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, P \in F, Q \in F$. Comme

$$(\lambda P+Q)(-1)=\lambda P(-1)+Q(-1)=\lambda P(1)+Q(1)=(\lambda P+Q)(1)$$

donc $\lambda P+Q \in F$.

Ainsi, F est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble des polynômes pairs est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Question.

$$E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \lim n u_n=0\}$$

Il est clair que $\lim n \times 0=0$, donc la suite nulle appartient à F.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F.

Donc

$$n u_n \longrightarrow 0 \text{ et } n v_n \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$n(\lambda u_n+v_n)=\lambda n u_n+n v_n \longrightarrow 0,$$

donc $\lambda u+v \in F$.

Ainsi, F est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question.

$$E=\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad F=\left\{u \in E \mid \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x=u(0)\right\}$$

Il est clair que $\int_0^1 0\mathrm{d}x=0$ donc la fonction nulle appartient à F.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u, v deux fonctions de F.

Donc $\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x=u(0)$ et $\int_0^1 v(x)\mathrm{d}x=v(0)$, par conséquent, $\int_0^1(\lambda u+v)(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \lambda u(x)+v(x)\mathrm{d}x=\lambda u(0)+v(0)=(\lambda u+v)(0)$ donc $\lambda u+v \in F$.

Ainsi, F est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

■ Familles libres, familles liées

Question. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

La famille $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ est-elle libre ? liée ?

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha \mathrm{e}_1+\beta \mathrm{e}_2+\gamma \mathrm{e}_3=\vec{0}$. Cette relation équivaut au système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}2\alpha+\beta+\gamma & = & 0\\ \alpha+2\beta+\gamma & = & 0\\ \alpha+\beta+2\gamma & = & 0\end{array}\right.$$

équivalent à

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= -\alpha \\ \alpha+\beta+\gamma &= -\beta \\ \alpha+\beta+\gamma &= -\gamma \end{cases}$$

ce qui donne

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

donc la famille $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ est libre.

Question. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}i\\-i\\1\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1+i\end{pmatrix}$$

La famille $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ est-elle libre ? liée ?

On remarque que

$$\mathrm{e}_1+i\mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}i\\-i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i^2\\-i^2\\-1+i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1+i\end{pmatrix}=\mathrm{e}_3$$

donc $\mathrm{e}_1+i\mathrm{e}_2-\mathrm{e}_3=\vec{0}$. C'est une relation de dépendance linéaire entre $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2$ et e_3. Cette famille est donc liée.

Question. On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit f,g et h les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\quad ,g(x)=x\mathrm{e}^{-x}\quad ,h(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$$

La famille (f,g,h) est-elle libre ? liée ?

Soient λ,μ,γ trois réels tels que $\lambda f+\mu g+\gamma h=0$.

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda f(x)+\mu g(x)+\gamma h(x)=0$.

Puisque l'exponentielle ne s'annule jamais, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda+\mu x+\gamma x^2=0$. Le polynôme $\lambda+\mu X+\gamma X^2$ est donc nul. Or un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. Donc $\lambda=\mu=\gamma=0$.

La famille (f,g,h) est donc libre.

Question. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes

$$P_1(X)=X^2+1,\quad P_2(X)=X^2+X+1,\quad P_3(X)=1-X$$

La famille (P_1,P_2,P_3) est-elle libre ? liée ?

Soient λ,μ,γ trois réels tels que $\lambda P_1+\mu P_2+\gamma P_3=0$. Donc

$$\lambda(X^2+1)+\mu(X^2+X+1)+\gamma(1-X)=(\lambda+\mu)X^2+(\mu-\gamma)X+(\lambda+\mu+\gamma)=0$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls donc

$$\lambda+\mu=0,\quad \mu-\gamma=0,\quad \lambda+\mu+\gamma=0.$$

La première et la dernière égalité donnent $\gamma = 0$ puis de la deuxième, il vient $\mu = \gamma = 0$ et de la première, on tire enfin $\lambda = -\mu = 0$.

La famille (P_1, P_2, P_3) est donc libre.

■ **Familles génératrices.**

Question. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes

$$P_1(X) = X^2 + 1, \quad P_2(X) = X^2 + X + 1, \quad P_3(X) = 1 - X$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $P = a + bX + cX^2$ un polynôme de $\mathbb{R}^2[X]$.

On vérifie facilement que

$$P = (a-c)(1-X) + (b+a-c)(X^2+X+1) + (2c-b-a)(X^2+1)$$

donc tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ est combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3.

La famille (P_1, P_2, P_3) est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Question. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et les trois vecteurs

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

La famille $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ est-elle génératrice de $\mathbb{C}^3$?

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{C}^3$ et a, b, c trois nombres comlexes. On étudie l'équation

$$u = a\mathrm{e}_1 + b\mathrm{e}_2 + c\mathrm{e}_3 \quad (S)$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{llllll} a & & & = x & (L_1) \\ & -bi & +c & = y & (L_2) \\ -a & +b & +c(1+i) & = z & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllll} a & & = x & & (L_1) \\ -bi & +c & = y & & (L_2) \\ b & +c(1+i) & = z+x & (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllll} a & & = x & & (L_1) \\ -bi & +c & = y & & (L_2) \\ & ci & = y + (z+x)i & (L_3 \leftarrow iL_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} a & = x \\ b & = \dfrac{1}{-i}\left(y - \dfrac{y+(z+x)i}{i}\right) = \dfrac{(-1+i)y - (z+x)i}{-i^2} = -y + (y-z-x)i \\ c & = \dfrac{y+(z+x)i}{i} = z + x - iy \end{array}\right.$$

La famille $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ est donc génératrice de $\mathbb{C}^3$. (Comme le système (S) admet une unique solution, on peut même dire que la famille $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.)

Fin