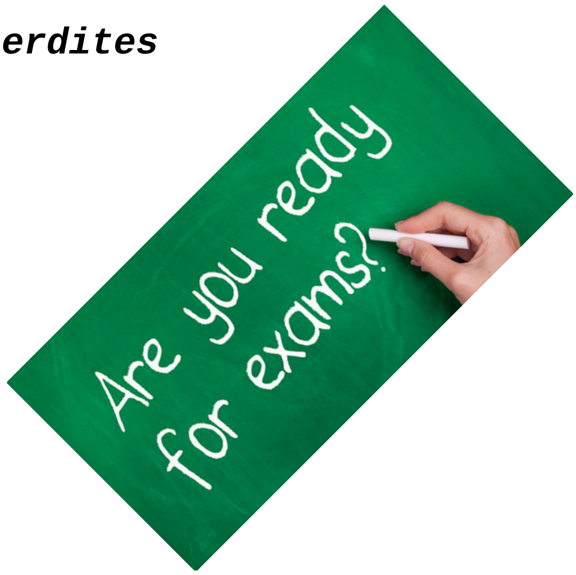
Mercredi 19 Septembre 2018

Simulation DS

Révision Terminale

Durée : 1 heure

Calculatrices Interdites



Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $4x^2+x-1=3x^2+5x+4$
2. $\ln(2x-3)-\ln(5x+2)=0$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $4x-2x^2 \geqslant -6$
2. $\dfrac{2}{4-x}<1$
3. $|3x-1| \geqslant 1$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(3x^2)-\ln(4x)+\ln 2=0$ (en utilisant les propriétés de la fonction logarithme).
2. Pour x nombre réel, exprimer $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{5x}}}\left(\dfrac{e^x(e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{e^{3x}}\right)^{-3}$ en fonction de e^x.
3. Exprimer (sans calculatrice) le nombre $\dfrac{10\ln 9+5\ln 8}{\ln 648}$ plus simplement et déterminer que c'est un nombre entier. *($648=8\times 81$).*

Exercice 4

Calculer l'intégrale

$$\int_0^2 \left(e^{-x}+2x^3-1\right)\,dx.$$

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{1+x+x^2}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer son ensemble de définition D_f.
2. Justifier que f est dérivable et calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Fin

CORRECTION

Exercice 1

1. L'équation équivaut à l'équation du second degré $x^2-4x-5=0$ de discriminant $\Delta = 16+20=36=6^2$. Les solutions sont $\dfrac{4-6}{2}=-1$ et $\dfrac{4+6}{2}=5$. Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-1,5\}}$.
2. L'ensemble de validité de l'équation est
$\mathrm{D}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x-3>0 \text{ et } 5x+2>0\} =]\frac{3}{2},+\infty[\cap]-\frac{2}{5},+\infty[=]\frac{3}{2},+\infty[$. Dans cet ensemble, l'équation équivaut aux équations $\ln(2x-3)=\ln(5x+2)$, $2x-3=5x+2$, $3x=-5$, $x=-\frac{5}{3}$. Or $-\frac{5}{3}$ n'est pas dans D donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\varnothing}$.

Exercice 2

1. L'inéquation équivaut à $2x^2-4x-6\leqslant 0$, à $x^2-2x-3\leqslant 0$. Le trinôme x^2-2x-3 a pour discriminant $\Delta=16$, ses racines sont -1 et 3 donc il est négatif à l'intérieur des racines, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est $\boxed{[-1,3]}$.
2. L'ensemble de validité de l'inéquation est $\mathbb{R}\setminus\{4\}$. Dans cet ensemble de validité, $\dfrac{2}{4-x}<1$ équivaut à $\dfrac{2-(4-x)}{4-x}<0$ c'est-à-dire à $\dfrac{x-2}{4-x}<0$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$			
$4-x$				$+$	0	$-$	
$\frac{x-2}{4-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Le tableau de signe donne que l'ensemble de solutions est $\boxed{]-\infty,2[\cup]4,+\infty[}$.

3. $|3x-1|\geqslant 1$ équivaut à $3x-1\leqslant -1$ ou $3x-1\geqslant 1$, $x\leqslant 0$ ou $3x\geqslant 2$, $x\leqslant 0$ ou $x\geqslant\frac{2}{3}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{]-\infty,0]\cup[\frac{2}{3},+\infty[}$.

Exercice 3

1. L'ensemble de validité de l'équation est $]0,+\infty[$. Dans cet ensemble, l'équation équivaut à $\ln 3+2\ln x-\ln 4-\ln x+\ln 2=0$, $\ln x=\ln\frac{4}{3\times 2}$, $\ln x=\ln\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}$ car exp est la réciproque de ln. L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left\{\frac{2}{3}\right\}}$.
2. $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{5x}}}\left(\dfrac{e^{x}(e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{e^{3x}}\right)^{-3}=\dfrac{e^{2x-3(x-\frac{1}{2}x)}}{e^{\frac{5}{2}x-3\times 3x}}=\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{e^{-\frac{13}{2}x}}=e^{7x}=\boxed{(e^x)^7}$.

3. $\dfrac{10\ln 9+5\ln 8}{\ln 648}=\dfrac{10\ln(3^2)+5\ln(2^3)}{\ln(2^3\times 3^4)}=\dfrac{20\ln 3+15\ln 2}{3\ln 2+4\ln 3}=\boxed{5}$.

Exercice 4

$$\int_0^2 \left(e^{-x}+2x^3-1\right)dx=\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^4-x\right]_0^2=-e^{-2}+8-2+1=\boxed{7-e^{-2}}.$$

Exercice 5

1. Le trinôme au dénominateur a pour discriminant $\Delta=1-4=-3<0$ donc il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$.
2. f est le quotient de deux fonctions polynômes donc elle est dérivable sur D_f et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1+x+x^2-(x+1)(2x+1)}{(1+x+x^2)^2}=\dfrac{-x^2-2x}{(1+x+x^2)^2}=\boxed{-\dfrac{x(x+2)}{(1+x+x^2)^2}}$.
3. On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/3$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont données par les limites du quotient des termes de plus haut degré $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$.
4. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ c'est-à-dire $y=-\dfrac{1}{3}(x-1)+\dfrac{2}{3}$ soit encore $\boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+1}$.