Samedi 13 Octobre 2018

Devoir Survéillé 1

Calcul Algébrique-Logie

Durée : 2 heures 30mn

Documents & Calculatrices interdits

Attention de bien jouer le jeu, et de ne pas vous servir de votre ancienne calculatrice pour la représenation graphique ou pour tout autre calcul ! Car vous n'y aurez droit ni aux concours, ni à aucun DS ...

Exercice 1. (Raisonnement par analyse-synthèse)**.** Dans la suite de l'exercice, on chercher à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

On suppose qu'une telle fonction existe.

1. (a) Prouver que $f(0) = 1$.

   (b) En déduire que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x-1) = 2 - x$$

   (c) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

2. Conclure.

Exercice 2

1. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$.. $\qquad x(1-x) \leqslant 1/4$.

2. Soit a, b et c trois réels dans $[0,1]$.

   Prouver que l'un des nombres suivants est inférieur à $1/4$.

   $$a(1-b), \qquad b(1-c) \quad \text{et} \quad c(1-a).$$

   (Raisonnement par l'absurde)

   Indication. On pourra considérer le produit de ces trois nombres.

Exercice 3 Résoudre l'équation $|x-3| + |x-1| = (x-2)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_\varphi$ de définition de φ.
2. Déterminer les limites de φ en -1 et 1. Interprétation graphique ?
3. (a) Rappeler la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ (*on pourra poser un* $X = ...$)
   (b) Récrire judicieusement φ pour en déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -1$.
4. On introduit sur $]-1,1[$ la fonction h définie par $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$.
   (b) Calculer h' sur $]-1,1[$.
   (c) Résoudre sur $]-1,1[$ l'inéquation $\ln(1-x) < \ln(1+x)$. En déduire le signe de h'.
   (d) Dresser le tableau de variations de h. En déduire le signe de h.
   (e) Déterminer la limite de h en 1, en posant $X = 1-x$.
   (f) Donner le tableau de variations de φ.
5. Dessiner l'allure de φ.
6. Résoudre sur $\mathcal{D}_\varphi$ l'équation $\varphi(x) = -2$.

Exercice 5 :

On veut montrer l'égalité suivante : pour tout entier $n \geq 2$,

$$(*) \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. Montrer l'égalité $(*)$ par récurrence.
2. (a) Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout entier $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k-1}.$$
   (b) Retrouver alors l'égalité $(*)$.

Exercice 6 :

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n^2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n < 0$.

3. Montrer que la suite u est décroissante à partir du rang 4.

4. On définit la suite v par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n^2 - 2n - 3$.

- **a)** Montrer que la suite v est géométrique.
- **b)** Déterminer une expression de v_n en fonction de n.
- **c)** En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 (Facultatif)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{p=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2n$$

Etablir cette égalité par récurrence.

Les étapes de la récurrence seront soigneusement rédigées et un soin particulier devra être accordé à l'hérédité.