Corrigé

Exercice 1

1. (a) On teste la relation avec $x = f(0)$ et $y = 0$. Il vient

$$f(0) = f(f(0) - f(0)) = 2 - f(0) - 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1.$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x-1) = f(x - f(0)) = 2 - x - 0 = 2 - x.$$

(c) D'où $f(x) = f((x+1)-1) = 2-(x+1) = 1-x$ pour tout réel x.

On vient de prouver que si une telle fonction existe alors elle s'écrit $x \in \mathbb{R} \mapsto 1-x$.

2. Procédons à la synthèse. On vérifie que le candidat trouvé convient. Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1-x$. Soient deux réels x et y :

$$f(x - f(y)) = f(x - (1-y)) = f(x+y-1) = 1-(x+y-1) = 2-x-y.$$

f est bien solution du problème.

En conclusion, il y a une unique solution au problème.

Exercice 2

1. Méthode 1. Considérons $f : x \in [0,1] \mapsto x(1-x)$. L'étude de la fonction prouve l'existence d'un maximum atteint en $x = 1/2$. Ainsi, pour tout x.

$$f(x) \leqslant f(1/2) \quad \Rightarrow \quad x(1-x) \leqslant 1/4.$$

Méthode 2. On écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x(1-x) = -(x-1/2)^2 + 1/4 \leqslant 1/4.$$

Car tout carré est positif.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les nombres

$$a(1-b), \qquad b(1-c) \quad \text{et} \quad c(1-a),$$

sont supérieurs strictement à $1/4$. Ainsi

$$a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) = a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Or, la question précédente impose $$a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

On a une contradiction. En conclusion, l'un des nombres est inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 3

— Si $x \leqslant 1$, on a
$$|x-3|+|x-1| = -(x-3)-(x-1) = -2x+4.$$
On résout pour $x \leqslant 1$, $-2x+4=(x-2)^2$. C'est équivalent à $0 = x(x-2)$.
Comme $x \leqslant 1$, seul $x=0$ est solution.

— Si $x \in [1,3]$, on a
$$|x-3|+|x-1| = -(x-3)+(x-1) = 2.$$
L'équation $2=(x-2)^2$ est équivalent à $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})=0$. Comme $\sqrt{2} \simeq 1.4$, on constate qu'il n'y a pas de solutions.

— Si $x \geqslant 3$, on a
$$|x-3|+|x-1| = (x-3)+(x-1) = 2x-4.$$
On constate alors qu'il y a une solution donnée par $x=4$.
En conclusion, il y a deux solutions à équation $|x-3|+|x-1|=(x-2)^2$ donnée par 0 et 4.

Exercice 4

1. $\mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1+x>0 \text{ et } 1-x>0 \text{ et } \ln(1-x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x>-1,\ x<1 \text{ et } 1-x \neq 1\} =]-1,0[\cup]0,1[$.
2. $\lim\limits_{x\to-1} 1+x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$, et comme $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1-x) = \ln 2 > 0$, par quotient, $\lim\limits_{x\to-1} \varphi(x) = -\infty$.
Asymptote verticale en $x=-1$. De même, $\lim\limits_{x\to1} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} \ln(1+x) = \ln 2$, d'où $\lim\limits_{x\to1} \varphi(x) = 0$.
3. a) Limite usuelle : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ puis en posant $X=-x$, on a d'une part $\lim\limits_{x\to0} X = 0$ et d'autre part, $\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+X)}{-X} = -\frac{\ln(1+X)}{X}$ d'où $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{X\to0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$.
b) Il suffit de remarquer que $\varphi(x) = \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$ d'où par quotient, $\lim\limits_{x\to0} \varphi(x) = \frac{1}{-1} = -1$.
4. (a) φ est dérivable sur $\mathcal{D}_\varphi$ et $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) - \ln(1+x)(-\frac{1}{1-x})}{(\ln(1-x)^2)} = \dfrac{\frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{(\ln(1-x)^2)}$.
On conclut en remarquant que $(1+x)(1-x) = (1-x^2)$ et que $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b\times c}$.
(b) h dérivable sur $]-1,1[$ et $h'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} + \ln(1+x) + (x+1)\frac{1}{x+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
(c) Inéquation définie sur $]-1,1[$. Puis par stricte croissance de l'exp, $\ln(1-x) < \ln(1+x) \Leftrightarrow 1-x < 1+x$ $\Leftrightarrow 0 < 2x \Leftrightarrow 0 < x$.
(d) h admet un minimum en 0 et $h(0)=0$ donc h positive sur $]-1,1[$.
(e) $\lim\limits_{x\to1} (1+x)\ln(1+x) = 2\ln(2)$. Pour l'autre moitié, poser $X = 1-x$, en remarquant que $\lim\limits_{x\to1} X = 0^+$. Alors $\lim\limits_{x\to1} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X\to0^+} X\ln(X) = 0$ d'après les croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x\to1} h(x) = 2\ln 2$.
(f) $h \geq 0$ sur $]-1,1[$, et de plus $1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, donc φ croissante. (Dans le TV, la double barre est facultative pour φ en 0 car la limite est -1 en 0^+ et en 0^- : φ se prolonge par continuité en 0).
5. Pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$: $\varphi(x) = -2 \Leftrightarrow \ln(1+x) = -2\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln(1/(1-x)^2) \Leftrightarrow (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
$\Leftrightarrow (1+x)(1-x)^2 = 1 \Leftrightarrow -x-x^2+x^3 = 0 \Leftrightarrow x(-1-x+x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ car $x \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$).
Deux racines éventuelles : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or $4<5<9 \Rightarrow 2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow 3<1+\sqrt{5} \Rightarrow 1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathcal{D}_\varphi$. Mais $-3<\sqrt{5}<-2 \Rightarrow -2<1-\sqrt{5}<-1 \Rightarrow -1\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2} < 0$ et donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{D}_\varphi$.
Conclusion : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de cette équation.

Exercice 5

1. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$P(n) : \text{“}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.\text{”}$$

On a

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{2^3 - 2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3},$$

donc la proposition $P(2)$ est vraie.

Soit un entier $n \geq 2$. Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie. On a, en utilisant $P(n)$ à la deuxième égalité,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3 - k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} + \frac{1}{(n+1)^3 - (n+1)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{2(n+2)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

ce qui signifie que la proposition $P(n+1)$ est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que : $\forall n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.

2. On cherche trois réels a, b, c tels que : $\forall k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^3 - k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k-1} = \frac{(a+b+c)k^2 + (c-b)k - a}{k^3 - k}.$$

Il suffit que l'on ait

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ -b + c &= 0 \\ a &= -1 \end{cases}$$

La résolution du système nous donne $a = -1$, $b = c = \frac{1}{2}$.

On trouve donc que : $\forall k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^3 - k} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)}.$$

On en déduit que : $\forall n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} \right)$$

Exercice 6

1. $u_1 = 2u_0 - 0^2 = \boxed{2}$, $u_2 = 2u_1 - 1^2 = \boxed{3}$, $u_3 = 2u_2 - 2^2 = \boxed{2}$ et $u_4 = 2u_3 - 3^2 = \boxed{-5}$.
2. Par récurrence sur n :
   - $u_4 = -5 < 0$;
   - supposons que pour un entier n fixé, $n \geqslant 4$, $u_n < 0$; alors $u_{n+1} = 2u_n - n^2 < 0$.

   Donc, par le principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n < 0$.
3. $u_{n+1} - u_n = 2u_n - n^2 - u_n = u_n - n^2 < 0$ si $n \geqslant 4$.
   Donc la suite u est décroissante à partir du rang 4.
4. a)
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1)^2 - 2(n+1) - 3 = 2u_n - n^2 - n^2 - 2n - 1 - 2n - 2 - 3 \\ &= 2u_n - 2n^2 - 4n - 6 = 2(v_n + n^2 + 2n + 3) - 2n^2 - 4n - 6 = 2v_n. \end{aligned}$$
   Donc la suite v est géométrique de raison 2.

   b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n v_0 = 2^n(-2) = \boxed{-2^{n+1}}$.

   c) D'où $u_n = v_n + n^2 + 2n + 3 = \boxed{-2^{n+1} + n^2 + 2n + 3}$.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 2n$ »

— Pour $n = 1$,
$$\sum_{p=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1^2 + 1 = 2$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n+1}\left[\left(\sum_{k=p}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} &= \sum_{p=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=p}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2\right] + \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\left[\left(\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\right)^2\right] + \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\left[\left(\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2} + 2\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{(n+1)k}\right)\right] + \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{(n+1)k} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \\
&= 2n + \frac{2}{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{(n+1)k} \\
&= 2n + \frac{2}{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1} \\
&= 2n + \frac{2}{n+1} + \frac{2n}{n+1} \\
&= 2n + 2 = 2(n+1)
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.