Samedi 13 Octobre 2018

Devoir Survéillé 1

Calcul Algébrique-Logie

Durée : 2 heures 30mn

Documents & Calculatrices interdits

Attention de bien jouer le jeu, et de ne pas vous servir de votre ancienne calculatrice pour la représenation graphique ou pour tout autre calcul ! Car vous n'y aurez droit ni aux concours, ni à aucun DS ...

Exercice 1

Démontrer la formule du cours suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2

Soit un entier $n \geq 1$.

1. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{5^{k-1}}{4^{k+1}}$ et $S_2 = \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{8^k}$.
2. Calculer $S_3 = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.
3. Calculer $S_4 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k 3^{n+1-k}$.

Exercice 3

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$.

En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n (sans symbole $\sum$) *(on pourra utiliser le principe des sommes télescopiques).*

Exercice 4 –

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$x > 1 \Longrightarrow \frac{3x-1}{x+1} > 1\,.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 1$.

   On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   (c) Pourquoi la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est-elle correctement définie ?
   (d) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique.
   (e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de v_n puis la valeur de u_n.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2u_n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \frac{3}{2}$.

   On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - \frac{3}{2}}$.

   (c) Pourquoi la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est-elle correctement définie ?
   (d) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique.
   (e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de v_n puis la valeur de u_n.

Exercice 5 – Le but de cet exercice est de trouver, en raisonnant par analyse-synthèse, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad f(xf(y) + x) = xy + f(x). \qquad (\star)$$

1. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.
   (a) Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(f(y) + 1) = y + f(1)$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel z_0 tel que $f(z_0) = 0$.
   (c) Montrer que $f(z_0) = z_0^2$.
   (d) En déduire que $z_0 = 0$ puis que $f(-f(1)) = -1$.
   (e) On pose $\lambda = f(1)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x$.
   (f) Donner une relation vérifiée par λ.
2. Conclure.

Exercice 6 :

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_\varphi$ de définition de φ.
2. Déterminer les limites de φ en -1 et 1. Interprétation graphique ?
3. (a) Rappeler la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ (*on pourra poser un* $X = \dots$)
   (b) Récrire judicieusement φ pour en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -1$.
4. On introduit sur $]-1,1[$ la fonction h définie par $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$.
   (b) Calculer h' sur $]-1,1[$.
   (c) Résoudre sur $]-1,1[$ l'inéquation $\ln(1-x) < \ln(1+x)$. En déduire le signe de h'.
   (d) Dresser le tableau de variations de h. En déduire le signe de h.
   (e) Déterminer la limite de h en 1, en posant $X = 1-x$.
   (f) Donner le tableau de variations de φ.
5. Dessiner l'allure de φ.
6. Résoudre sur $\mathcal{D}_\varphi$ l'équation $\varphi(x) = -2$.