Simulation DS N°2

Ensembles-Applications, Complexes

Jeudi 01 Novembre 2018

Durée : 1 heure

Exercice 1 : (**) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Préciser les variations de f. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera.
4. Expliciter f^{-1}.
5. Écrire un programme Scilab qui prend en argument un réel positif a et renvoie le graphe de f sur $[-a, a]$.
6. Modifier le programme pour afficher le graphe de f^{-1}.

Exercice 2 :

Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, deux applications. Vérifier que :

1. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 3 :

(1) Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-9-40i$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^4 + 18u^2 + 1681 = 0$.

(3) On considère l'équation (e) d'inconnue le nombre complexe z :

$$(\mathrm{e}) : \quad z^3 + (3+2i)z^2 + (8+46i)z + 24 + 120i = 0$$

- **(a)** Montrer que (e) admet une solution réelle a que l'on déterminera.
- **(b)** Montrer qu'il existe deux nombres complexes p, q tels que pour tout nombre complexe z,

$$z^3 + (3+2i)z^2 + (8+46i)z + 24 + 120i = (z-a)(z^2 + pz + q)$$

- **(c)** En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de (e)

Corrigé

Exercice 1 :

1. f est paire. On peut limiter l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$
Par composition, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On peut conclure que f est injective par stricte monotonie.
3. Précisons les limites en $\pm\infty$.
$$f(x) \underset{x\geqslant 0}{=} 1 - \frac{1}{1+x} \to_{+\infty} 1^- \quad \text{et} \quad f(x) \to_{-\infty} -1 \quad \text{par imparité.}$$
Par le théorème de la bijection (f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone), f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $]-1,1[$.
4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, on a les équivalences en distinguant pour x positif et x négatif. Pour $x \geqslant 0$,
$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x} = y \iff 1 - \frac{1}{1+x} = y \iff \frac{1}{1+x} = 1-y \iff 1+x = \frac{1}{1-y} \iff x = \frac{y}{1-y}.$$
Pour, x négatif, on a
$$f(x) = y \iff \frac{x}{1-x} = y \iff \frac{1}{1-x} - 1 = y \iff \frac{1}{1-x} = 1+y \iff 1-x = \frac{1}{1+y} \iff x = \frac{y}{1+y}.$$
On résume
$$f^{-1}: \ y \in]-1,1[\mapsto \frac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}.$$

5.
```
function graphe(a)
x=linspace(-abs(a),abs(a),200)
y=x./(1+abs(x))
plot(x,y)
endfunction
```

6. Comme le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à l'axe d'équation $y = x$. Il suffit d'échanger le rôle de x et y.

7.
```
function graphereciproque(a)
x=linspace(-abs(a),abs(a),200)
y=x./(1+abs(x))
plot(y,x)
endfunction
```

Exercice 2:

1. Soient $y, y' \in \mathrm{F}$, tels que $g(y) = g(y')$, montrons que $y = y'$.
Comme f est surjective, il existe $x, x' \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = y \quad$ et $\quad f(x') = y'$.
Par suite, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x')$.
Par injectivité de $g \circ f$, on a $x = x'$. Puis, $y = f(x) = f(x') = y'$.
On a prouvé l'injectivité de g.

2. Soit $y \in \mathrm{F}$, montrons qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$.
On pose $z = g(y) \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de $g \circ f$, on a l'existence de $x \in \mathrm{E}$ tel que $g \circ f(x) = z$.
Il vient, $g(f(x)) = z \quad$ et $\quad g(y) = z$.
Par injectivité de g, il vient $f(x) = y$.
Ceci étant valable pour tout $y \in \mathrm{F}$, on a prouvé la surjectivité de f.

Exercice 3 :

(1) Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-9-40i$.

On a $-9-40i = 4^2 - 5^2 - 2\times 4\times 5i = 4^2 + (5i)^2 - 2\times 4\times 5i = (4-5i)^2$. Les racines carrées complexes de $-9-40i$ sont : $4-5i$ et $-4+5i$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^4 + 18u^2 + 1681 = 0$.

On fait le changement d'inconnue $z = u^2$. L'équation devient alors $z^2 + 18z + 1681 = 0$. Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 18^2 - 4\times 1681 = 18^2 - 82^2 = 100\times(-64) = -(80)^2 = (80i)^2$.

Les solutions de l'équation d'inconnue z sont donc : $-9+40i$ et $-9-40i$.

Il reste alors à résoudre les équations $z^2 = -9+40i$ et $z^2 = -9-40i$.

La seconde est résolue en (1) et les solutions de la deuxième sont les conjugués racines calculées. Les solutions de l'équation d'inconnue u sont donc $4-5i; -4+5i; 4+5i; -4-5i$.

(3) On considère l'équation (e) d'inconnue le nombre complexe z : (e) : $\quad z^3 + (3+2i)z^2 + (8+46i)z + 24 + 120i = 0$

(a) Montrer que (e) admet une solution réelle a que l'on déterminera.

On remarque que $(-3)^3 + (3+2i)(-3)^2 + (8+46i)(-3) + 24 + 120i = 0$ donc -3 est racine réelle de cette équation.

(b) Montrer qu'il existe deux nombres complexes p, q tels que pour tout nombre complexe z,

$$z^3 + (3+2i)z^2 + (8+46i)z + 24 + 120i = (z-a)(z^2 + pz + q)$$

Un calcul donne $(z+3)(z^2+pz+q) = z^3 + (3+p)z^2 + (q+3p)z + 3q$ donc par identification

$3+p = 3+2i; q+3p = 8+46i$ et $3q = 24+120i \quad$ d'où $\ q = 8+40i$ et $p = 2i$.

On obtient donc pour tout nombre complexe z,

$$z^3 + (3+2i)z^2 + (8+46i)z + 24 + 120i = (z+3)(z^2 + 2iz + 8 + 40i).$$

(c) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de (e)

L'équation du second second degré $z^2 + 2iz + 8 + 40i = 0$ a pour discriminant $\Delta = -4 - 4(8+40i) = -36 - 160i = 4(-9-40i) = (8-10i)^2$ donc ses solutions sont : $-i+4-5i = 4-6i$ et $-i-4+5i = -4+4i$.

Les solutions de (e) sont donc $-3; 4-6i; -4+4i$.

Fin